

基于Gram矩阵的压电传感器布局优化及试验验证

亓恣涵¹, 王 晨¹, 沈 星¹, 姜永平^{2,3}, 陈逸笑^{2,3}, 张家应⁴

(1. 南京航空航天大学航空学院, 南京 210016; 2. 中国飞机强度研究所, 西安 710065; 3. 强度与结构完整性全国重点实验室, 西安 710065; 4. 北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 精准监测结构振动状态的前提是传感器布局的合理设计。针对航天器结构轻量化的严苛约束, 如何在保证振动监测精度的前提下优化传感器布局与数量、降低传感系统自重, 是航天器结构监测亟需解决的关键问题。面向传感器布局优化难题, 构建一种基于模态能量输出率的传感器布局优化准则, 以模态能量输出率为权重因子对Gram矩阵特征值进行加权最大化处理, 提升结构模态观测的能量集中度, 以实现传感器布设数量的最优精简。以四角固支板为研究对象, 采用有限元仿真与物理试验相结合的方式, 开展冲击载荷与正弦振动工况下的传感器能量输出特性分析, 并与经典Bruant优化准则的布局结果进行对比验证。研究表明, 依据所提改进准则布设的压电传感器, 可有效采集结构各阶模态振动信号, 同时显著提升传感器信号输出强度与监测有效性。该研究可为航天器结构振动监测中传感器布局的优化设计提供新的可行思路与技术参考。

关键词: Gram矩阵; 压电传感器; 布局优化; 数目优化; 可观性等级; 结构振动; 试验验证

中图分类号: V416.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2026)08-1991-10

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2026.08.004

Piezoelectric Sensor Placement Optimization and Experimental Verification Based on Gram Matrix

Qi Zihan¹, Wang Chen¹, Shen Xing¹, Jiang Yongping^{2,3}, Chen Yixiao^{2,3}, Zhang Jiaying⁴

(1. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an 710065, China; 3. National Key Laboratory of Strength and Structural Integrity, Xi'an 710065, China; 4. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Reasonable sensor placement is the prerequisite for effective structural vibration monitoring. Subject to the strict lightweight constraints of spacecraft structures, optimizing sensor layout and quantity to reduce the weight of sensing systems while ensuring monitoring accuracy is a key issue for spacecraft structural monitoring. Aiming at the sensor placement optimization problem, an improved optimization criterion is proposed based on modal energy output ratio. Taking the modal energy output ratio as the weight factor, the weighted eigenvalues of the Gram matrix are maximized to improve the energy concentration of modal observation, thereby realizing the minimization of sensor deployment quantity. A four-edge clamped plate is taken as the research object, and the sensor energy output characteristics under impact load and sinusoidal vibration conditions are analyzed by combining finite element simulation and experimental tests. The performance is compared with the layout results obtained by the classical Bruant optimization criterion. The results show that the piezoelectric sensors arranged by the proposed improved criterion can effectively collect multi-order modal vibration signals of the structure and significantly enhance the sensor signal output strength. This study provides a novel and feasible technical approach for the optimal layout design of sensors for spacecraft structural vibration monitoring.

Key words: Gram matrix; Piezoelectric sensor; Placement optimization; Number optimization; Observability level; Structural vibration; Experimental verification

收稿日期: 2025-06-27; 修回日期: 2025-09-04

基金项目: 国家自然科学基金(12102017); 航空科学基金(20230015052002); 全国重点实验室开放课题(RAL202303-1); 强度与结构完整性全国重点实验室开放基金(LSSIKFJJ202403017)

0 引言

航天器等大型空间结构普遍具有尺寸跨度大、结构刚度低、转动惯量大等动力学特征。这些特征在实际运行过程中易诱发低频大幅振动,严重影响结构安全性。合理布设振动传感器是实现结构振动监测、状态感知与振动抑制的重要手段。同时,航天器对结构轻量化指标要求严苛,传感器数量过多会增加结构自重与布线复杂度。因此,探索兼顾轻量化与高信噪比的传感器布局方法,对航天器结构健康监测与振动控制具有重要工程意义。

在结构健康监测^[1]、振动控制等领域,围绕振动传感器的布局优化问题,国内外学者基于不同评价指标提出了多种传感器布局优化理论与方法^[2-4]。Ding等^[5]融合全局扫描与结构关键区域驱动,提出了主动压电传感器布局优化方法。Schulz等^[6]基于能量原理推导闭环系统能耗表达式,实现了传感器布局优化。此外,求解 Riccati 方程以实现存留能量的最小化,也是一种重要的优化途径^[7]。在优化目标的选择方面,Arbel^[8]选择了最大化各阶模态最小输出能量;Bruant等^[9]引入了能量输出率概念,即最大化“各模态输出的总能量与单模态独立控制输出能量之比”的最小值。

压电传感器具备轻量化、响应快等特性,在结构振动测试领域具有广泛用途。压电传感器布局优化研究包括面向不确定性的多目标鲁棒优化^[10]、融合导波监测的约束优化^[5]及布局/增益协同策略^[11]等方法;还有一些方法在梁^[12-13]、锥壳^[14]、简支板^[15]、圆柱壳^[16-17]等结构中得到了验证。此外,在新型传感器件的布局优化方面,学者们也进行了相关研究^[18]。

针对压电传感器的布局优化问题是一个多维度、多阶段系统性问题,需采用合适的优化算法寻求全局最优解。针对算法易陷入局部最优的瓶颈,研究者提出了多种改进方案。王军等^[19]采用有限元法与遗传算法(GA)结合,以可控性 Gram 矩阵特征值构建能量吸收目标函数,并在简支板振动控制中验证了方法的有效性。Karami等^[20]改进了人工蜂群算法,以优化板结构主动振动控制的压电作动器/传感器位置。此外,基于机器学习的求解算法也得到了研究^[21-23]。

根据文献可知,Arbel^[8]与 Bruant等^[24]均未实现

模态归一化与全局能量最大化的协同;量纲差异导致前者布局偏向局部最优;而后者缺乏对能量输出率的有效约束。

针对上述问题,本文以典型平板结构为研究对象,开展压电传感器布局优化方法研究。以能量最大输出率和模态的可观性为评价指标,提出一种压电传感器布局优化准则,以寻找自由振动、受迫振动两种工况下满足一定输出效率的传感器最少数目,以及对应的布局位置。在得到最合理的传感器布局后,通过有限元仿真和试验对其进行验证,并与经典 Bruant 优化准则开展对比分析,验证本文方法在模态监测性能与轻量化布局方面的优越性。

1 压电传感器布局优化原理与方法

1.1 基于 Gram 矩阵的压电传感器位置优化原理

已有研究表明,大尺寸空间结构中压电片布局优化通常以 Gram 矩阵特征值为性能指标。作为系统可观性量化工具,该矩阵为传感器布局优化提供了理论基础。

对装备 N_s 个压电传感器的柔性结构系统,其模态坐标输出方程为

$$y_j = \sum_{l=1}^N c_{jl} \alpha_l + \sum_{l=1}^{N^R} c_{jl}^R \alpha_l, j = 1, \dots, N_s \quad (1)$$

式中: N 为主要模态数目, N^R 为剩余模态数目, N 与 N^R 可根据结构特性自行决定,本文中 N 为6, N^R 为2; α_l 为第 l 阶模态的位移; y_j 为第 j 个传感器测得的传感信号; c_{jl} 为第 l 个主要模态运动引起的第 j 个传感器信号传感常数; c_{jl}^R 为第 l 个剩余模态运动引起的第 j 个传感器信号传感常数。

系统输出能量表达式为

$$J = \int_0^t \mathbf{y}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \quad (2)$$

继而可以表示为^[25]

$$J = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{W}(T) \mathbf{x}(0) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{W}(T)$ 为可观性 Gram 矩阵

$$\mathbf{W}(T) = \int_0^T e^{A^T(\tau)} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{A(\tau)} d\tau \quad (4)$$

式中: $\mathbf{C}$ 为系统输出矩阵; $\mathbf{W}(T)$ 由 $\mathbf{C}$ 决定,并直接决定由初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 引起的系统输出能量。 $\mathbf{C}$ 定义了模态坐标 $\mathbf{x}$ 到传感器输出信号 $\mathbf{y}$ 的映射:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{j1} & c_{j2}^R \end{bmatrix} [0] [0] \quad (5)$$

使用矩形锆钛酸铅(PZT)压电陶瓷片作为传感器时,其输出矩阵元素定义为

$$c_{ji} = \frac{1}{\varepsilon_{33} S} h_p \left(\frac{h_p}{2} + h \right) \int_S \left(e_{31} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + e_{32} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \right) dS \quad (6)$$

式中: ε_{33} 为介电常数; e_{31}, e_{32} 为压电常数; S 为陶瓷片底面积; h_p 和 h 分别为陶瓷片和基板厚度; ψ_i 为第 i 阶模态振型。

根据 Hac 等^[25]的研究,系统输出最大化与 Gram 可观性矩阵 $\mathbf{W}(T)$ 的范数最大化等价。如式(4)所示, $\mathbf{W}(T)$ 的范数取值取决于传感器位置;因此,可通过最大化 $\mathbf{W}(T)$ 的范数,实现输出能量最优。

对于稳定线性系统,主要模态 ($i = 1, 2, \dots, N$) 和剩余模态 ($i = 1, 2, \dots, N^R$) 的 Gram 矩阵分量分别如式(7)和式(8)所示^[25]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W})_{ii} &= (\mathbf{W}_0)_{ii} = (\mathbf{W}_0)_{i+N, i+N} = \\ &= \sum_{j=1}^{N_s} \frac{(c_{ij})^2}{4\zeta_i \omega_i} = \frac{1}{4\zeta_i \omega_i} \sum_{j=1}^{N_s} (c_{ij})^2 \quad (7) \\ (\mathbf{W}_0)_{i+N, i+N} &= (\mathbf{W}_0)_{i+2N+N^R, i+2N+N^R} = \\ &= \frac{1}{4\zeta_i^R \omega_i^R} \sum_{j=1}^{N_s} (c_{ij}^R)^2 \quad (8) \end{aligned}$$

若 $(\mathbf{W}_0^U)_{ii}$ 特征值过小,会导致系统振动较难观测;若 $(\mathbf{W}_0^R)_{ii}$ 特征值过大,会导致溢出影响严重。

针对该问题,Arbel^[8]和 Bruant 等^[24]提出了优化准则:

$$J_{\text{Arbel}} = \max \left\{ \min_{i=1, \dots, N} \left(\mathbf{W}_0^U(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii} - \tilde{\gamma} \max_{i=1, \dots, N^R} \left(\mathbf{W}_0^R(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii} \right\} \quad (9)$$

$$J_{\text{Bru}} = \max \left\{ \min_{i=1, \dots, N} \frac{\left(\mathbf{W}_0^U(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}}{\max_{P_1, \dots, P_{N_s}} \left(\mathbf{W}_0^U(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}} - \tilde{\gamma} \frac{\left(\mathbf{W}_0^R(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}}{\max_{P_1, \dots, P_{N_s}} \left(\mathbf{W}_0^R(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}} \right\} \quad (10)$$

式中: γ 为权重指数; $P_1, P_2, \dots, P_{N_s}$ 表示传感器位置。

当 $\gamma = 0$ 时,优化准则将完全忽略剩余模态的影响。然而,由于 Gram 可观性矩阵中各阶模态的量纲或数值范围不一致,Arbel 的优化准则未能均衡考虑所有模态,导致最终得到的传感器布局位置并非全局最优。Bruant 等在 Arbel 的基础上改进了优化准则,使用各阶模态实际观测能量除以理论最大能量,以能量输出率为指标,实现了对各模态的均匀考虑。

1.2 基于 Gram 矩阵的改进优化准则

根据 Arbel 提出的优化准则,传感器的布局原则是“针对输出能量最小的模态^[6],使该阶模态的输出能量最大化”。然而,该方法未能保证输出总能量达到最大,因此其所得位置并非最优解。Bruant 等^[9]提出的优化准则以各阶模态的能量输出率为参考指标,没有考虑其他模态的能量输出率,无法保证总输出能量最大。为解决这一问题,本文提出一种改进的压电传感器位置优化准则,在考虑各阶模态输出率的同时,使总输出能量最大:

$$J_{\text{New}} = \max \{ J_1 - J_2 \} \quad (11)$$

$$\begin{cases} J_1 = \sum_{k=1}^N (\mathbf{W}_0^U)_{kk} \cdot \left(\min_{i=1, \dots, N} \frac{\left(\mathbf{W}_0^U(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}}{\max_{P_1, \dots, P_{N_s}} \left(\mathbf{W}_0^U(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}} \right) \\ J_2 = \sum_{k=1}^{N^R} (\mathbf{W}_0^R)_{kk} \cdot \left(\max_{i=1, \dots, N^R} \frac{\left(\mathbf{W}_0^R(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}}{\max_{P_1, \dots, P_{N_s}} \left(\mathbf{W}_0^R(P_1, \dots, P_{N_s}) \right)_{ii}} \right) \end{cases} \quad (12)$$

式中: J_1 和 J_2 分别表示主要模态/剩余模态的加权输出能量,以“主要模态的最小能量输出率”和“剩余模态的最大能量输出率”作为加权因子。通过限制主要模态的最小能量输出率,并对剩余模态的最大能量输出率进行惩罚,该准则可提升所有主要模态的可观性并抑制所有剩余模态的溢出效应,确保主要模态的观测效果更为均匀。此外,准则中包含的各阶模态能量输出会引导优化过程向总输出能量最大方向进行,在实际应用中表现为信号强度更高、清晰度更好。

该准则对各阶模态的输出能量进行统一量化,从整体角度考虑能量输出,既保证各阶模态输出能量的差异性,又提高了能量输出率。

1.3 传感器布局优化流程与方法

1.3.1 嵌套优化框架

本文采用传感器数量优化与位置优化双层嵌套迭代结构开展传感器布局求解,完整迭代流程如下:1)初始化传感器数量 $N_s = 1$ 。2)结合 Bruant 等提出的准则 J_{Bru} 和改进 Gram 准则 J_{New} ,利用遗传算法求解当前 N_s 值下的传感器最优布局 $\mathbf{P}_{N_s}^*$ 。3)基于模态可观性等级评估布局性能,若所有主要模态均满足 $D_{\text{DEG},i} \geq 100\%$,判定当前布局满足全模态可观要求,迭代终止;若不满足约束,则令传感器数量 N_s 自

增1,重复步骤2)~3)进行迭代计算。4)迭代收敛后得到满足约束条件的最小传感器配置数量 N_s^* 及对应最优空间布局。该嵌套架构本质为双层优化问题:外层优化以最小化传感器总数 N_s 为目标函数,内层为固定传感器数量下的位置寻优,约束条件为所有关键模态达到完全可观标准。整体流程图示意图如图1所示。

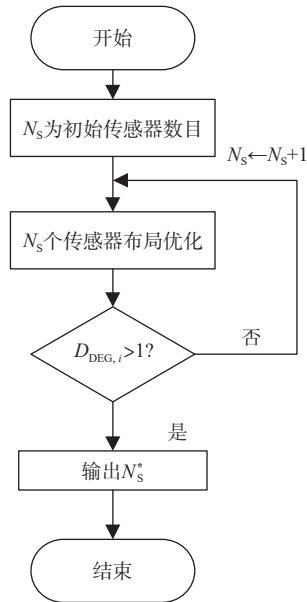


图1 传感器数目优化路径

Fig. 1 Optimization path of sensor quantity

1.3.2 布局优化

在优化 N_s 个传感器布局时,优化变量为各传感器位置坐标,定义为

$$P = \left\{ (x_k, y_k) \right\}_{k=1}^{N_s} \quad (13)$$

式中: x_k, y_k 为第 k 个压电传感器(PZT压电陶瓷片)在结构表面的中心坐标。

传感器优化准则将工程需求抽象为设计原则,其数学表达式即优化目标函数。本文选择式(10)、(11)作为目标函数,采用遗传算法(GA)进行优化,参数设置如下:种群规模300,交叉概率0.3,变异概率0.05,最大遗传代数1000^[19]。

定义基板长边方向为 x 轴,范围为 $[L_{\min}, L_{\max}]$;宽边方向为 y 轴,范围为 $[W_{\min}, W_{\max}]$ 。优化需满足几何边界约束和最小间距约束:

$$\begin{cases} x_k \in [L_{\min} + d_x, L_{\max} - d_x] \\ y_k \in [W_{\min} + d_y, W_{\max} - d_y], \forall k \in [1, N_s] \\ \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\| \geq d_{\min}, \forall i \neq j \end{cases} \quad (14)$$

式中: d_x 和 d_y 分别为PZT压电陶瓷片半长和半宽,取 $d_{\min} = 30$ mm。该约束可避免传感器间产生电磁干扰或机械碰撞,并保证PZT完全附着。

1.3.3 可观性评估

式(4)表明,结构振动的可观性与传感器布局紧密相关,传感器应放置在可观性矩阵范数最大的地方,即系统变形最大的地方。为实现结构系统可观,理想方案是为每个主要模态配置一个专用传感器,并将其置于远离该模态振型节点或节线的位置^[7]。

本文优化目标是在保证可观的前提下减少传感器数量。针对各阶模态可观性提出标准,用 $D_{\text{DEG}, i}$ 表征第 i 阶模态的可观性等级,如式(15)所示:

$$D_{\text{DEG}, i} = \frac{\sum_{j=1}^{N_s} c_{ji}^2}{\max_{\text{one sensor}} c_{1i}^2}, i = 1, \dots, N + N^R \quad (15)$$

该式的实质是,所有传感器对第 i 阶模态的观测能量之和,除以单个传感器对该阶模态的最大观测能量(下标“one sensor”表示单传感器)。如前所述, $D_{\text{DEG}, i} \geq 100\%$ 时满足该模态的可观性要求。

2 有限元仿真研究

板类构件是大型空间结构中最典型的基础承载单元。本文选取尺寸580 mm × 580 mm × 1 mm的金属平板作为仿真模型,结合有限元分析验证改进优化准则。所有有限元仿真均在Abaqus 2023软件上完成,计算硬件配置为Intel® Core™ i9-12 900 K(16核24线程),配备128 GB DDR4内存。

空间结构如图2所示:平板设置75 mm × 75 mm矩形区域,施加固支边界条件;图中红色小矩形代表PZT压电陶瓷传感元件,图示布设方案作为对比参考布局。图2(a)中紫色正方形标记为冲击载荷、正弦激励载荷的加载点位,模型所用各类材料力学性能参数如表1所示。

固支板采用C3D8R结构单元,单元尺寸为1 mm × 1 mm × 1 mm,共计336 400个单元;压电片采用C3D8E单元,单元尺寸为1 mm × 1 mm × 0.2 mm,以确保电场梯度与应变场的精确耦合。

对有限元模型开展模态分析,提取结构前8阶固有振型;将前6阶划定为主要模态,剩余2阶作为剩余模态。全部工况计算均在Abaqus/Standard求解模块内完成,两类载荷仿真设置如下:1)采用隐式动力学求解器进行冲击载荷工况分析,设置时间

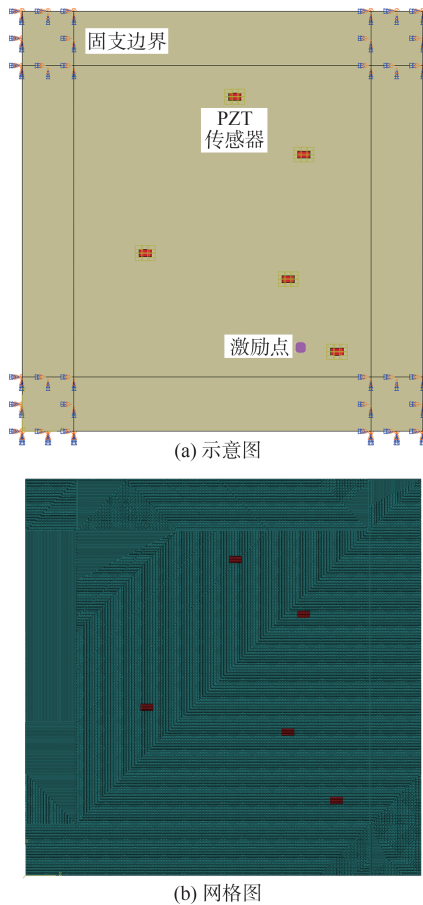


图2 固支板有限元模型

Fig. 2 Finite element model of the fixed support plate

表1 基板与压电片材料参数

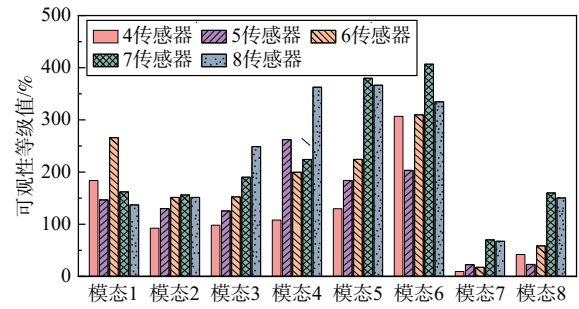
Table 1 Material properties of base and piezoelectric patch

参数	基板材料数值	压电片板材料数值
L/mm	580	18
W/mm	580	10
H/mm	1	0.2
E/GPa	207	63
$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	7 870	7 650
μ	0.292	0.30
e_{31}, e_{32}	—	-7.209
α, β	0.000 1	—

步长为2 ms,并使用瑞利阻尼模型($\alpha = 0.000\ 1, \beta = 0.001$)覆盖0~100 Hz频段的阻尼特性;2)采用模态动力学求解器进行正弦载荷工况分析。

2.1 传感器数目优化

基于1.3.1节确立的准则,考虑剩余模态影响($\gamma = 1$)时,采用 J_{New} 优化准则进行位置优化。图3展示了不同传感器数目情况下,优化布局的可观性等级($D_{\text{DEG},i}$)结果。图3表明,配置5个传感器时,所有主要模态的可观性等级 $D_{\text{DEG},i} > 100\%$,而1、2阶剩

图3 不同压电传感器个数的可观性等级值($\gamma = 1$)Fig. 3 Observability index values under different numbers of piezoelectric sensors ($\gamma = 1$)

余模态可观性等级 $D_{\text{DEG},i}$ 为22.50%和22.93%,远小于100%。当传感器数量减少至4个时,第2阶模态的 $D_{\text{DEG},i} < 100\%$ 。因此,综合模态可观性要求与剩余模态抑制效果, J_{New} 准则下最优传感器数量为5个。

2.2 不同位置优化准则结果对比

以上述途径获得的传感器最优数量结果,对比 J_{Bru} 和 J_{New} 两种优化准则的优化结果。由于 J_{Bru} 优化准则的最优传感器数量尚未明确,选取4~6个传感器,分别利用优化准则 J_{Bru} 和优化准则 J_{New} 进行位置优化,并评估优化结果的可观性等级 $D_{\text{DEG},i}$,结果如图4所示。

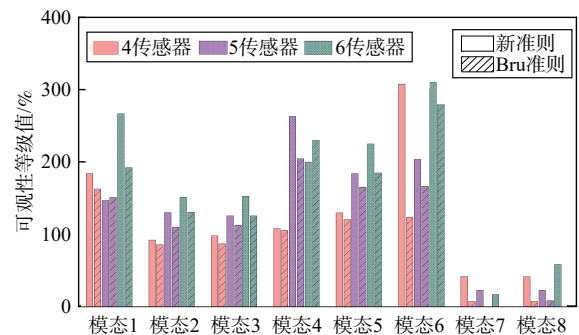
图4 两种优化准则下,不同压电传感器个数的可观性等级值($\gamma = 1$)Fig. 4 $D_{\text{DEG},i}$ of the different number of piezoelectric sensor under two optimization criteria ($\gamma = 1$)

图4表明,考虑剩余模态影响($\gamma = 1$)时, J_{Bru} 优化准则的最优传感器数量亦为5个;但同数量传感器下, J_{New} 布局的各阶模态 $D_{\text{DEG},i}$ 值不同程度地高于 J_{Bru} 布局。具体而言,对于5个传感器的情况, J_{New} 布局的第1阶模态 $D_{\text{DEG},i}$ 值与 J_{Bru} 布局基本持平; J_{New} 布局的第2、3、4、5、6阶模态 $D_{\text{DEG},i}$ 值均明显高于 J_{Bru} 布局,其中第2阶结果高18.11%,第3阶结果高11.37%,第4阶结果高28.52%,第5阶结果高

11.44%,第6阶结果高22.36%。同时, J_{New} 布局对剩余模态的抑制效果更优。综上, J_{New} 准则在保证模态可观性要求的前提下具备传感器数量优势。

为进一步验证两种优化准则的算法性能,在相同的硬件平台和遗传算法参数下绘制收敛曲线进行对比分析。图5展示了两种准则的归一化适应度值随遗传代数的变化情况。在目前的研究中,收敛代数定义为“适应度值达到其归一化最优值99%所需要的遗传代数”。从图中可知, J_{New} 准则在第65代达到收敛;而 J_{Bru} 准则在第69代达到收敛。该结果表明,两种准则的算法收敛速度基本相当。

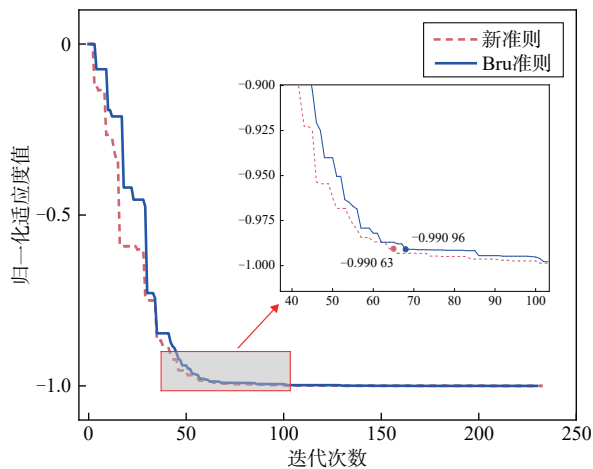
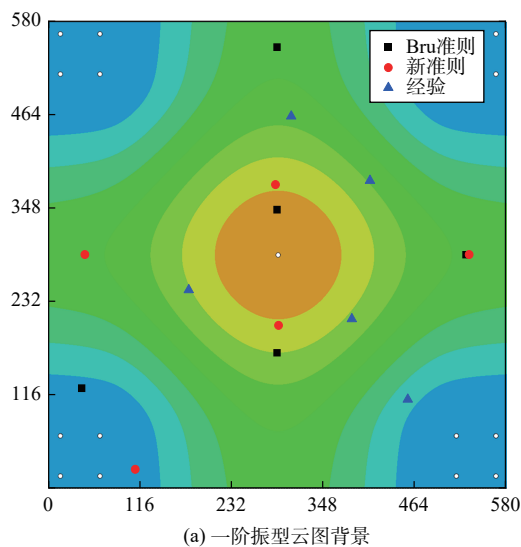


图5 归一化收敛曲线

Fig. 5 Normalized convergence curves

基于图4分析结果,最优传感器数量为5个,提取 J_{New} 准则和 J_{Bru} 准则优化得到的传感器布局坐标,



(a) 一阶振型云图背景

并结合基于关键位置布设的经验布局方案,得到具体坐标数据如表2所示。经验布局的选取参考了NASA-HDBK-7005规范标准,其设计原则是将传感器布置在应变较大且远离模态节线的位置,同时靠近冲击源以捕捉高频瞬态信号。

表2 优化布局和经验布局坐标

Table 2 Coordinates of optimized layout and empirical layout

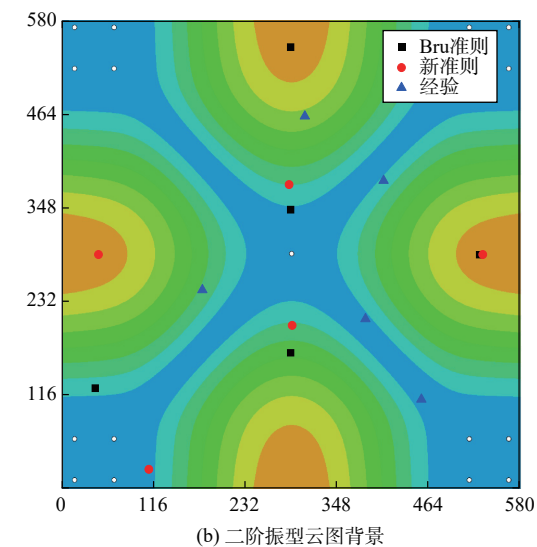
布局	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)	(x_4, y_4)	(x_5, y_5)
J_{New}	(110, 23)	(46, 290)	(292, 202)	(288, 377)	(534, 290)
J_{Bru}	(290, 346)	(42, 124)	(290, 548)	(530, 290)	(290, 168)
经验	(408, 382)	(385, 210)	(178, 246)	(456, 110)	(308, 462)

图6直观呈现了3种布局方案下,5个压电传感器的空间分布结果,并叠加了前两阶模态振型云图作为背景,以更清晰地展示传感器位置与结构高应变区域的关联性。可以看出,3种布局方案在传感器几何位置的排布特征上存在显著差异。

2.3 优化布局动态响应的有限元仿真验证

在Abaqus软件中对3种传感器布局进行冲击载荷仿真分析。激励点位置见图2(a),各布局均施加相同冲击载荷。提取压电传感器输出的电压信号,依据压电效应原理,将传感器输出电压平方和作为能量评价指标,记为能量指标。

图7展示了3种布局的传感器输出能量时程曲线。 J_{New} 布局的能量输出全程最高,峰值达到 $1.38 \times 10^{-7} \text{ V}^2$,较 J_{Bru} 布局和经验布局分别提升15.00%和



(b) 二阶振型云图背景

图6 5个传感器的优化布局结果, J_{New} 布局(红色圆形), J_{Bru} 布局(黑色方形),经验布局(蓝色三角形)

Fig. 6 Optimized layout results with five sensors: J_{New} layout (red circles), J_{Bru} layout (black squares), empirical layout (blue triangles)

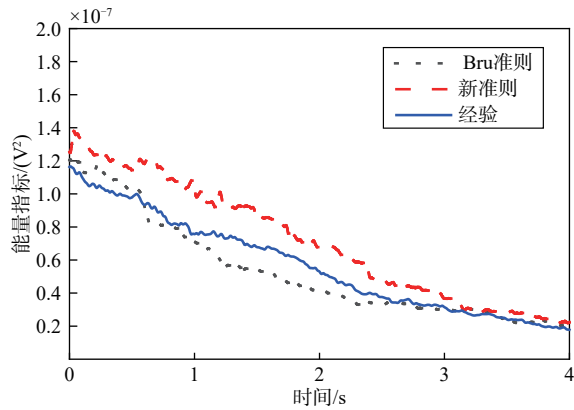


图7 3种布局下的传感器输出能量对比

Fig. 7 Comparison of sensor output energy under three layouts

16.95%。能量包络面积反映了4 s内传感器的总输出能量, J_{New} 包络面积 $> J_{Bru}$ 包络面积 $\approx$ 经验包络面积, 即 J_{New} 布局输出的总能量最大。

为进一步验证布局, 于同一点位(见图2(a))施加正弦激励, 对5传感器配置下的3种布局进行能量输出仿真。基于模态分析确定的关键激励频率(结果见表3), 选取10~90 Hz的扫频范围以覆盖前6阶主要模态。仿真结果如图8所示, 在30 Hz及60 Hz等关键频率点, J_{New} 布局的输出能量显著优于其他两种布局。70 Hz处观察到经验布局能量略高, 但该频率超出主要模态频段, 印证了 J_{New} 准则和 J_{Bru} 准则对剩余模态的抑制作用。响应峰值位置符合模态分析的仿真结果, 进一步验证了仿真结果的正确性。

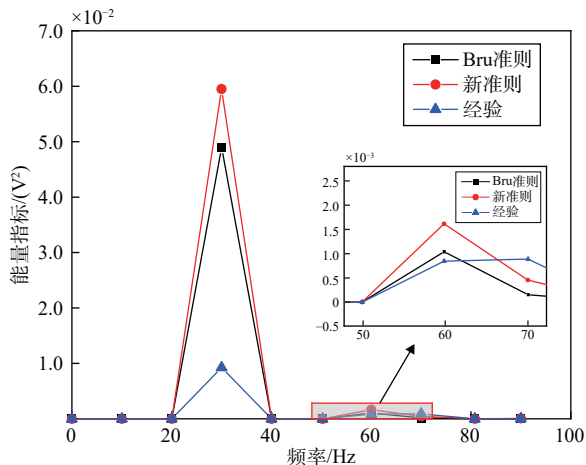


图8 10~90 Hz正弦激励下3种布局的传感器输出能量 (线性尺度)

Fig. 8 Sensor output energy of three layouts under sinusoidal excitation from 10 to 90 Hz (linear scale)

综上所述, 通过仿真结果分析可知, J_{New} 准则不仅在模态可观性上明显优于 J_{Bru} 准则, 同时对剩余模

态有良好的抑制作用。此外, 其还能在满足相同可观性等级的前提下减少传感器数量, 显著提升输出能量。

3 试验验证

为验证优化布局的有效性, 搭建如图9所示的试验平台。平台主体为580 mm × 580 mm × 1 mm 平板, 通过4个可调节支座固支, 并配备激振器(ESD-005)、力锤(PCB 086C03)、压电传感器阵列(PZT)、加速度传感单元(PCB TLD352C34), 配备模态测试系统(SIRIUSi-8xACC)及动态应变测试系统(DH5922D), 用于模态测试、冲击载荷试验和正弦振动试验。

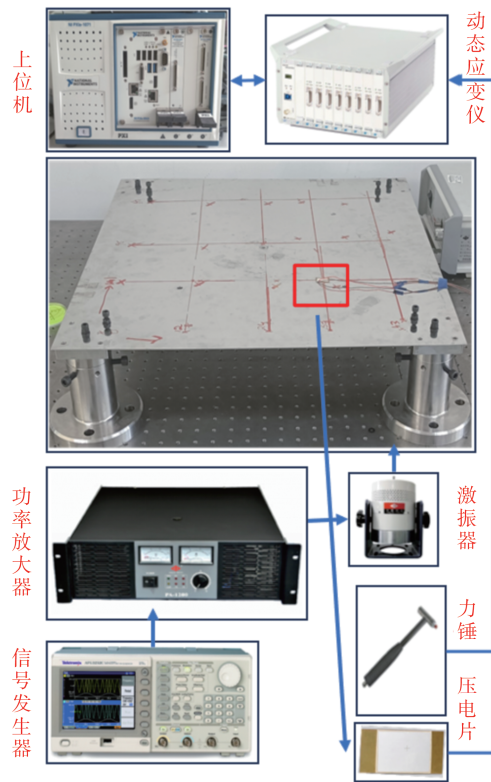


图9 试验平台

Fig. 9 Experimental platform

试验中传感器的布设坐标及激励点位置均与有限元仿真中的相应设置保持一致。采集各组布局下压电传感器输出的电压信号, 完成不同方案模态能量输出率的对比分析。为保障有限元仿真模型计算精度, 需精准获取结构模态振型特征。本文开展模态标定试验, 实测平板固有频率与振型, 并与仿真计算结果对标, 以此完成有限元模型参数修正。

依托模态测试综合试验平台, 采用力锤敲击激

励法对四角固支金属平板实施模态测试,识别得到结构各阶固有频率与对应阻尼比,测试结果如表3所示。

表3 自然频率及阻尼比

Table 3 Natural frequencies and damping ratios

模态	仿真自然频率/Hz	试验自然频率/Hz	阻尼比/%
1	18.197	17.87	0.555
2	30.080	26.65	0.402
3	30.080	31.33	0.274
4	32.623	39.96	0.317
5	44.865	53.57	0.142
6	60.796	67.33	0.163

3.1 冲击载荷试验

压电传感器输出能量与输出电压的平方呈正比关系,因此本文将全部5个传感元件输出电压平方之和作为模态能量评价指标。力锤敲击产生的冲击载荷幅值存在随机波动,为消除载荷差异对评价结果的干扰、实现三类布局的公平对比,以冲击激励幅值为基础,对各组总输出能量进行归一化处理。图10为冲击激励工况下三组传感器布局的归一化能量时程曲线。分析其曲线规律可知,在自由振动工况下, J_{New} 布局的输出能量显著高于其他布局,表明其信号输出强度更高,有效信息更丰富。

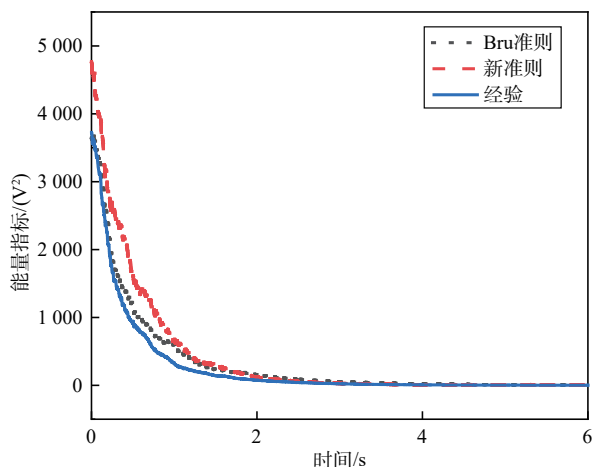


图10 脉冲载荷下3种布局输出能量对比: J_{New} 优化布局(红色)、 J_{Bru} 优化布局(黑色)、经验布局(蓝色)

Fig. 10 Comparison of output energy for three layouts under pulse load: J_{New} optimized layout (red), J_{Bru} optimized layout (black), empirical layout (blue)

3.2 正弦振动试验

针对3组不同传感器布局同步施加峰峰值恒定为1 V的正弦振动激励。结合有限元模态仿真与模态试验结果,在0~90 Hz频段内等间隔选取9个频

率点(10 Hz、20 Hz、…、90 Hz)开展测试,覆盖前8阶模态;激励加载位置选取图2(a)中标注的非振型节点点位。

对采集的电压信号进行处理分析:截取各类布局下响应稳定段1 s的时程数据。图11为正弦激励工况下三类布局的模态能量输出率对比曲线。试验曲线变化趋势与有限元仿真规律高度吻合,所有布局方案均在30 Hz附近出现总输出能量峰值。 J_{New} 布局的输出能量显著高于其他两种布局, J_{New} 红色线全程保持最高能量输出,其能量指标在模态频率20 Hz附近,较 J_{Bru} 布局提升55.59%,较经验布局提升139.98%;在模态频率40 Hz附近,较 J_{Bru} 布局提升170.32%,较经验布局提升436.07%。在激励相同的情况下,3种布局中, J_{New} 优化布局可输出更多的能量,拥有更高的能量输出率。

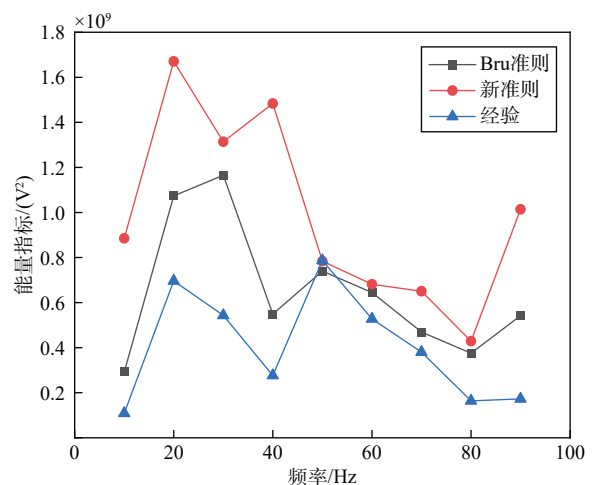


图11 0~90 Hz正弦激励下3种布局输出能量对比

Fig. 11 Comparison of output energy for three layouts under sinusoidal excitation of 0~90 Hz

4 结论

本文围绕传感器布局优化问题,提出了一种基于Gram矩阵的传感器布局优化方法,并进行初步验证,从而为传感器布局方法提供了一种新的设计思路。主要工作包括:

1)建立基于模态可观性和传感器能量输出的传感器布局评价方法,并提出了对应的传感器布局优化流程;

2)通过仿真与试验相结合的方式,在不同工况下验证了该方法的可行性;初步说明了该方法可以显著提高传感器输出能量,并降低传感器数量。

目前的研究以平板结构作为研究对象,对所提方法的有效性进行了初步验证;考虑到所提方法可以基于有限元方法获取模态振型,不局限于解方法,未来可对不规则结构和复合材料结构进行验证,从而进一步探索该方法在复杂结构下的运用效果,提升其技术成熟度。

参 考 文 献

- [1] 化蓉, 叶波, 邹杨坤, 等. 碳纤维复合材料结构健康监测压电传感器优化布置研究[J]. 化工自动化及仪表, 2025, 52(2): 227-238.
Hua Rong, Ye Bo, Zou Yangkun, et al. Research on the optimal arrangement of piezoelectric sensors for structural health monitoring of carbon fiber composite materials[J]. Control and Instruments in Chemical Industry, 2025, 52(2): 227-238.
- [2] 杨辰. 结构健康监测的传感器优化布置研究进展与展望[J]. 振动与冲击, 2020, 39(17): 82-93.
Yang Chen. Advances and prospects for optimal sensor placement of structural health monitoring[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(17): 82-93.
- [3] Huang Ying, Ludwig S A, Deng Fodan. Sensor optimization using a genetic algorithm for structural health monitoring in harsh environments[J]. Journal of Civil Structural Health Monitoring, 2016, 6(3): 509-519.
- [4] 王威远, 魏英杰, 王聪, 等. 压电智能结构传感器/作动器位置优化研究[J]. 宇航学报, 2007, 28(4): 1025-1029.
Wang Weiyuan, Wei Yingjie, Wang Cong, et al. Optimal investigation of sensor/actuator placement for piezoelectric smart structure[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(4): 1025-1029.
- [5] Ding Xuyun, Cheng Honggang. Global-local optimization layout method for active piezoelectric sensor driven by structural critical areas[J]. Structural Health Monitoring, 2024, 23(5): 2834-2852.
- [6] Schulz G, Heimbold G. Dislocated actuator/sensor positioning and feedback design for flexible structures[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(5): 361-367.
- [7] Kondoh S, Yatomi C, Inoue K. The positioning of sensors and actuators in the vibration control of flexible systems[J]. JSME International Journal Ser 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry, 1990, 33(2): 145-152.
- [8] Arbel A. Controllability measures and actuator placement in oscillatory systems[J]. International Journal of Control, 1981, 33(3): 565-574.
- [9] Bruant I, Gallimard L, Nikoukar S. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(10): 1615-1635.
- [10] Yang Chen, Xia Yuanqing. Interval Pareto front-based multi-objective robust optimization for sensor placement in structural modal identification[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2024, 242: 109703.
- [11] Shigueoka A H, Trindade M A. Closed-loop optimization of piezoelectric sensors locations and gains for output feedback active vibration control[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2023, 45(3): 140.
- [12] Bruant I, Coffignal G, Lene F, et al. A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(5): 861-882.
- [13] Yuan Jie, Szydlowski M, Wang Xing. An optimal sparse sensing approach for scanning point selection and response reconstruction in full-field structural vibration testing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2024, 212: 111298.
- [14] Horta Muñoz S, Ruiz D. Optimization of the polarization profile of conical-shaped shells piezoelectric sensors[J]. Sensors, 2022, 23(1): 442.
- [15] Muthalif A G A, Nor K A M, Wahid A N, et al. Optimization of piezoelectric sensor-actuator for plate vibration control using evolutionary computation: modeling, simulation and experimentation[J]. IEEE Access, 2021, 9: 100725-100734.
- [16] Hu Kaiming, Guo Jifeng, Li Hua, et al. Multi-mode vibration averagedly control for cylindrical shells by optimally distributed piezoelectric sensors and actuators[J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2022, 10(2): 809-826.
- [17] Sun Shupeng, Zhao Xinqiu, Yang Yang, et al. Active vibration control of rotating carbon nanotube reinforced composite cylindrical shells via piezoelectric patches[J]. Journal of Vibration and Control, 2025, 31(15-16): 3104-3125.
- [18] Daraji A H, Ye J Q, Hale J M. Optimisation of active SHM system based on optimal number and placement of piezoelectric transducers[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2023, 34(4): 425-439.
- [19] 王军, 杨亚东, 张家应, 等. 面向结构振动控制的压电作动器优化配置研究[J]. 航空学报, 2012, 33(3): 494-500.
Wang Jun, Yang Yadong, Zhang Jiaying, et al. Investigation of piezoelectric actuator optimal configuration for structural vibration control[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(3): 494-500.
- [20] Karami M, Vatankeh R, Khosravifard A. A modified fuzzy-tuned artificial bee algorithm to optimal location of piezoelectric actuators and sensors for active vibration control of isotropic rectangular plates[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2021, 43(2): 86.
- [21] Semaan R. Optimal sensor placement using machine learning[J]. Computers & Fluids, 2017, 159: 167-176.
- [22] Amin M J, Riza N A. Machine learning enhanced optical distance sensor[J]. Optics Communications, 2018, 407: 262-270.

[23] Kelmar T, Chierichetti M, Davoudi Kakhki F. Optimization of sensor placement for modal testing using machine learning [J]. Applied Sciences, 2024, 14(7): 3040.

[24] Bruant I, Proslie L. Optimal location of actuators and sensors in active vibration control [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2005, 16(3): 197-206.

[25] Hać A, Liu Lidong. Sensor and actuator location in motion control of flexible structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 167(2): 239-261.

作者简介:

亓恣涵(1999-),男,博士生,主要从事模型修正等方面的研究。

E-mail: qizihan@nuaa.edu.cn

王 晨(1988-),男,博士,教授,主要从事变体飞行器、空天智能结构、结构动力学等方面的研究。本文通信作者。

E-mail: cwangaero@nuaa.edu.cn

沈 星(1975-),男,博士,教授,主要从事压电复合材料、压电陶瓷、压电传感器、驱动器的设计、制备、测试及航空智能结构的应用等方面的研究。

E-mail: shenx@nuaa.edu.cn

张家应(1989-),男,博士,教授,主要从事变体飞行器结构设计、主动振动控制、智能结构设计、结构动力学与控制等方面的研究。

E-mail: jiaying.zhang@buaa.edu.cn