

变后缘柔性翼板梁耦合动力学建模 与气动弹性分析¹⁾

黄可 张家应²⁾

(北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100190)

摘要 柔性变后缘飞行器可以在各飞行任务阶段实现最佳性能, 因此成为航空航天领域的重要发展方向。但是, 随着后缘结构柔性的增加容易引发结构响应, 从而导致气动弹性失稳。具有**截面非均匀刚度**特性的变后缘柔性翼不再满足梁的刚性截面假设, 使得大展弦比机翼采用的传统梁模型在此类问题不再适用。本文采用瑞丽-里茨假设形态法将变后缘柔性翼的刚度较大的前缘段和刚度较小的柔性后缘段分别等效为欧拉梁模型和基尔霍夫板模型。通过考虑刚性前缘的弯曲、扭转和柔性后缘的面外运动, 建立变后缘柔性翼**板梁耦合**动力学方程, 对静态力学性能和振动特性进行了分析。通过与实验和有限元模型进行对比验证, 发现本文建立的结构解析模型在预测刚性前缘和柔性后缘的结构响应具有较高精度。此外, 基于二维刚柔耦合柔性翼的非定常空气动力学理论和片条理论, 结合所提出的结构模型, 建立了模态空间表述下的变后缘柔性翼的高精度低阶气动弹性模型。通过与悬臂板颤振实验结果和Nastran有限元软件建立的气动弹性数值模型进行对比, 验证了所提出的低维高精度动力学模型在计算颤振速度和颤振频率的准确性。最后, 研究了变后缘柔性翼关键结构参数对颤振特性的影响, 发现柔性占比越大, 颤振速度越小。在柔性占比较小时, 变后缘柔性翼相较于等截面悬臂机翼具有更高的颤振速度。

关键词 变后缘柔性翼、**板梁耦合**、气动弹性分析、瑞丽-里茨法、模态分析

中图分类号: V211.47 **文献标识码:** A **doi:** 10.6052/0459-1879-XXXX

Plate-Beam Coupling Dynamic Modeling and Aeroelastic Analysis of Morphing Trailing Edge Flexible Wings¹⁾

Ke Huang Zhang Jiaying²⁾

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100190, China)

Abstract Under aerodynamic loading, morphing wings designed with compliant and lightweight principles are susceptible to structural responses that may lead to aeroelastic instability. The morphing trailing edge wing with **chordwise non-uniform stiffness** characteristic no longer satisfies the rigid section assumption of beam theory,

- - 收稿, - - 录用, - - 网络版发表。(此行具体日期由编辑部填写, 其余由作者提供)

1) 国家自然科学基金 (12102017, 92271104); 北京市自然科学基金(1232014)

2) 张家应, 副教授, 主要研究方向: 动力学与控制; 变体飞行器设计. Email:jiaying.zhang@buaa.edu.cn

引用格式: 黄可, 张家应. 变后缘柔性翼板梁耦合动力学建模与气动弹性分析. 力学学报, 2025, XX(XX): X-X

Huang Ke, Zhang Jiaying. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and aeroelastic analysis of morphing trailing edge flexible wings. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2025, XX(XX): X-X

making traditional beam models unsuitable, particularly for high aspect ratio wings. In this study, the Rayleigh-Ritz method is used to model the rigid front and flexible trailing sections of the morphing trailing edge wing as Euler beams and Kirchhoff plates, respectively. By considering the bending and twisting of the rigid front edge and the out-of-plane motion of the flexible trailing edge, a coupled plate-beam coupling dynamic equation is derived. Comparison with experimental results and finite element models shows that the analytical model accurately predicts the structural responses, including bending, twisting, and out-of-plane motion. Using unsteady aerodynamic theory for two-dimensional rigid-flexible coupled wings and strip theory, a high-accuracy low-order aeroelastic model is developed in modal space. Comparisons with cantilever plate flutter test results and Nastran aeroelastic numerical models confirm the model's accuracy in predicting flutter speed and frequency. Further analysis of key structural parameters reveals that as the flexibility ratio increases, the flutter speed decreases. When the flexibility ratio is small, the morphing trailing-edge wing exhibits a higher flutter speed compared to a constant cross-section cantilever wing.

Key words Morphing Trailing Edge Flexible Wing; Plate-Beam Coupling; Aeroelastic Analysis; Rayleigh-Ritz Method; Modal Analysis

引言

自然界鸟类在经过生物演化近千年后,其飞行具有简单、优雅和高效的特点^[1-3]。鸟类由于皮肤中包含着各种各样的感受器和神经末梢,使其对外界环境具有极为灵敏的感知^[4],因此可以根据环境自适应地对其翅膀的形状进行实时调整以实现优越的气动性能^[5]。由于传统飞行器是基于固定外形进行优化设计,其在大多数飞行状况下都是次优的,因此受到鸟类启发产生的具有自适应调整机翼形状能力的变体飞行器也逐渐成为航空航天的发展方向^[6-8]。

智能材料和先进传感器、驱动器的发展不断驱动着变体机翼技术的突破^[9-13]。变体机翼的形变主要依赖于柔顺机构,而柔顺机构的设计目标就是实现机翼结构的光滑连续变形,因此目前主流的变体机翼可以通过机翼几何参数变化进行分类^[1]。变体机翼通过针对不同飞行状态下自适应调整其几何参数,从而达到结构轻质、低燃油消耗和高飞行性能的设计目标,但变形机翼的柔性段趋于柔顺轻质会带来气动弹性失稳的潜在隐患^[14-15]。

目前针对传统机翼的气动弹性研究较为完善,基于刚性机翼和小扰动假设建立的 Theodorsen 非定常气动力理论在二元刚性机翼中获得广泛应用^[16]。由于柔性结构的刚度较小,传统的刚性机翼理论势必会忽略流体作用下产生的形变,因此需要采用梁模型或板模型来精准描述结构的柔性变形。Modaress 等^[17-19]发现基于梁模型和板模型其在处理不同展弦比的无后掠机翼具有不同的精确度,一般建议无后掠机翼展弦比小于 4 时采用板模型,大于 4 时采用梁模型。Gu^[20]等采用梁模型分析了半气动铰链对大展弦比机翼气动弹性特性的影响并进行了尺寸优化。Dowell^[21-23]总结了板模型在亚声速、跨声速和超声速的线性及非线性颤振特性,并给出了引发非线性颤振的根本原因。

由于机翼的柔性增加会产生较大幅度的气动弹性变形,因此需要考虑形变所产生的非定常空气动力学效应,采用高精度的 CFD 和低精度的势流理论都是较为有效的方法^[24]。相比于需要较高模型精度要求和较大的时间成本的 CFD 方法,经过大量的实验验证的势流理论在处理低速情况下大形变引发的非定常升力和颤振特性具有一定的优势,例如,挥

舞的旗帜^[25]、悬臂板^[26-27]以及刚柔耦合板模型^[28-29]。因此,许多空气动力学家基于势流理论提出了推广至柔性机翼的非定常空气动力学理论。Peters 等^[30]提出了针对柔性机翼的有限状态空气动力学理论。Modaress 等^[18]更进一步研究了 Peters 空气动力学模型与板梁模型的结合,在提高计算效率方面具有显著优势。Walker 等^[31]扩展了 Theodorsen 提出的仅限于刚体截面机翼的非定常空气动力学理论。

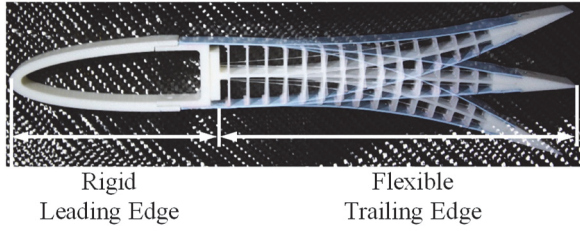


图 1 鱼骨柔性翼的结构示意图^[32]

Fig.1 The structural schematic diagram of FishBAC

在柔性机翼研究方面, Woods 和 Friswell 等^[32]提出了鱼骨柔性翼方案 (Fishbone Active Camber, FishBAC), 通过简单的结构设计实现变弯度功能, 只需要很小的驱动能量就可以实现机翼在弯度上大幅度光滑连续变化, 如图 1 所示。Woods 和 Friswell^[33]基于非均质欧拉梁模型对静气动弹性进行了研究。Rivero 和 Woods 等基于 Middlin 板模型研究了三维复合材料柔性机翼的结构特性^[34]和静气弹特性^[35]。Zhang 等^[36]基于 FishBAC 建立了一种刚柔耦合的结构模型, 将柔性段等效为轴向流作用下的柔性等截面梁。黄可等^[37]将柔性段等效为柔性非均质梁模型, 结合幂级数法研究了鱼骨柔性翼的固有振动特性, 利用有限元仿真和实验对计算结果进行了验证。

变后缘柔性翼对于大展弦比飞行器的性能提升具有较大的优势, 其可通过后缘连续变化可改善展向环量分布, 进而降低诱导阻力。但是, 由于展向跨度较大, 使得前缘刚性假设和二维翼型简化不再成立。本文基于板梁耦合模型建立三维变后缘柔性翼板梁耦合动力学模型。此外, 在模态空间中使用片条理论将二维刚柔耦合机翼非定常气动模型推广至三维, 建立了低维高精度气动弹性模型。本文提出的等效模型在计算静态、振动和气动弹性特性的预测具有较高精度并提高了计算效率。

1 变后缘柔性翼气动弹性模型

1.1 板梁耦合动力学建模

在前期的工作^[36]中, 鱼骨柔性翼的二维截面中刚性前缘处理为传统的刚性机翼, 将柔性段后缘处

理为具有柔性的欧拉梁结构, 并利用拉格朗日方程建立了板梁耦合模型。本文将上述模型推广至图2所示的鱼骨柔性翼三维机翼结构模型, 灰色部分对应如图1所示的柔性后缘, 白色部分对应刚性前缘。机身-机翼连接处理为柔性机翼的固支边界, 柔性机翼的刚性前缘可以视为固支悬臂梁, 而柔性后缘视作一端与刚性段前缘固接, 另一端与机体或者与内侧机翼固接。采用梁模型建模时往往会忽略柔性段机翼在气动载荷作用下的响应, 同时考虑到刚性段和柔性段的刚度差距往往达到2个数量级, 因此刚性段可等效为大展弦比结构, 在文献^[17]的研究中建议采用梁结构进行颤振分析。柔性段则考虑到与刚性较大的刚性段固接, 可以近似处理为前端固支的悬臂板, 且需要考虑弦向的弯度变化和展向的弯曲变形, 因此建模为具有二维位移场的板模型。

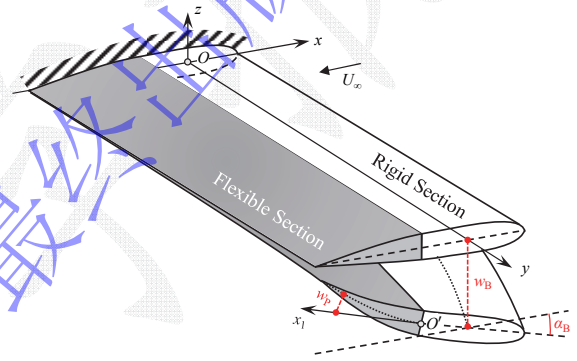


图 2 采用鱼骨柔性翼的柔性机翼

Fig.2 The morphing wing with FishBAC

采用瑞丽-里茨法对板梁耦合机翼进行建模。由于三维机翼结构在绕 z 方向抗弯刚度较大, 忽略结构面内的弯曲变形。记刚性前缘弯曲和扭转引起的浮沉和扭转自由度为 w_B, α_B , 柔性后缘相对与刚性翼梁固结的相对面外位移为 w_P , 上述位移和坐标系 $O-xyz$ 定义分别如图2所示。 x_1 代表柔性后缘起始点为原点 O' 并与绝对坐标系 x 轴反向的局部坐标系的坐标, b 和 c 代表机翼半弦长和弦长。后续的下标中B代表刚性前缘参数, P代表柔性后缘参数。对刚性前缘和柔性后缘的相对位移展开为假设形态函数的叠加并截断至 N_i 项

$$w_B(t, y) = Y_{Bw}(y)^T A(t) \quad (1)$$

$$\alpha_B(t, y) = Y_{Ba}(y)^T B(t) \quad (2)$$

$$w_P(t, x_1, y) = Y_{Pw}(y)^T C(t) X_{Pw}(x_1) \quad (3)$$

式中 $X(x_1) \in \mathbb{R}^{N_i \times 1}$ 和 $Y(y) \in \mathbb{R}^{N_j \times 1}$ 为符合边界条件的假设形态函数列向量。本文根据边界条件选择相同边界条件的均匀梁弯曲和扭转振动模态作为假设形态函数, 模态函数推导详见文献^[16]。下标 w 和 a 分

别代表弯曲和扭转正交基： $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{N_1 \times 1}$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{N_2 \times 1}$ 和 $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_3}$ 为对应的广义坐标列向量或矩阵，其中柔性后缘的广义坐标以正体表示矩阵形式，后续计算的坐标矩阵沿列展开为列向量，并采用斜体 $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{N_4 N_3 \times 1}$ 表示。

由于忽略结构面内的弯曲变形，因此根据连接关系可以获得系统的绝对位移 W 和扭转角 θ 为

$$\theta_B = \alpha_B \quad (4)$$

$$W_B = w_B + x \alpha_B \quad (5)$$

$$W_P = w_B + w_P + \left(\frac{l_B}{2} + x_1 \right) \alpha_B \quad (6)$$

式中 l_B 为等效梁的截面宽度，后续文中 l 均表示截面宽度，由前文定义的下标 B 或 P 表示刚性前缘或柔性后缘。阶梯悬臂板不同厚度的连接处需要考虑结构不连续导致的位移场不光滑。理想化的刚性连接保证位移和转角是连续的，但高阶导数存在突变^[40,41]。本文假设板相对位移 w_P 在连接处采用悬臂条件，其位移和转角均为 0。该条件保证绝对位移场中位移和转角是连续，而高阶导数可以存在不连续。

对绝对位移求导可以得到速度 $V_i = \dot{W}_i(t)$, $i = B, P$ 。系统总动能 T 为

$$\begin{aligned} T &= T_B + T_P \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-l_B/2}^{l_B/2} \rho_B t_B V_B^2 dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{l_P} \rho_P t_P V_P^2 dx_1 dy \end{aligned} \quad (7)$$

式中 L 和 t 为机翼展长和厚度， ρ 为材料密度，下标 B 或 P 表示刚性前缘或柔性后缘。

根据欧拉梁理论和基尔霍夫板理论，系统各部分势能^[17]可近似表示为

$$U_B = \int_0^L \frac{1}{2} E_B I_B \left(\frac{d^2 w_B}{dy^2} \right)^2 dy \quad (8)$$

$$+ \int_0^L \frac{1}{2} G_{B/B} \left(\frac{d \alpha_B}{dy} \right)^2 dy$$

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{l_P} (\nabla^2 W_P)^2 - 2(1-\nu) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^2 W_P}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W_P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_P}{\partial x_1 \partial y} \right) dx_1 dy \end{aligned} \quad (9)$$

式中 E, G, ν, I, J, D 分别代表材料的弹性模量、剪切模量、泊松比、截面惯性矩、截面极惯性矩和弯曲刚度，下标 B 或 P 表示刚性前缘或柔性后缘。

结合第二类拉格朗日方程可以得到自由振动动力学方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \quad (10)$$

式中拉格朗日函数 $\mathcal{L} = U - T$ ；总势能 $U = U_B + U_P$ ；广义坐标 $\mathbf{q} = \{q_n\} = \{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)\}$ 。

通过推导可以得到动力学方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{K}$ 代表系统的质量与刚度矩阵。

通过求质量矩阵和刚度矩阵的广义特征值和特征向量可以得到固有频率 ω 和模态 $\mathbf{P}$ ，所求解方程为

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (12)$$

针对获得的模态，以假设形态函数作为函数基，第 i 阶模态记为 $\mathbf{P}_i = \{\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i\}$ ，其中 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ 为式 (1)-(3) 中第 i 阶模态广义坐标列向量。采用板梁耦合模型得到的结构模态作为广义自由度进行模型降阶，并截断至前 N_s 阶模态。以结构模态为基底的所有变量均采用“*”上标以区分。对应广义质量和刚度分别为

$$\mathbf{M}_{ii}^* = \mathbf{P}_i^T \mathbf{M} \mathbf{P}_i \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_{ii}^* = \mathbf{P}_i^T \mathbf{K} \mathbf{P}_i \quad (14)$$

由于模态具有的正交性，并对模态向量采用广义质量归一化方法可以得到归一化处理后的特征向量，广义质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i / \sqrt{\mathbf{M}_{ii}^*} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{ii}^* = \bar{\mathbf{P}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{P}}_i = 1 \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{ii}^* = \bar{\mathbf{P}}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{P}}_i = \omega_i^2 \quad (17)$$

归一化后的质量矩阵和刚度矩阵分别为单位矩阵和以系统特征根为对角元的对角矩阵。表明在模态空间中，不同广义坐标之间是解耦的。

1.2 非定常气动力和低维气动弹性建模

根据二维非定常气动理论^[25]，可以建立物面条件与非定常气动压强的关系为

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\rho_f U_\infty C(k) f\left(\frac{x}{L}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right) - c \rho_f n \left(\frac{x}{L} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $C(k)$ 为西奥道森函数； $k = \omega b / U_\infty$ 为减缩频率； ρ_f 和 U_∞ 为来流密度和速度； $f(s) = 2\sqrt{(1-s)/s}$ ； $n(s) = 2\sqrt{(1-s)s}$ 。

基于片条理论^[15]计算得到非定常气动压强所作外力虚功 δE_p 为

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \iint_{S_B} \Delta p \delta W_B dS + \iint_{S_P} \Delta p \delta W_P dS \\ &= \delta q_i^* \left(\iint_{S_B} \Delta p \frac{\partial W_B}{\partial q_i^*} dS + \iint_{S_P} \Delta p \frac{\partial W_P}{\partial q_i^*} dS \right) \end{aligned} \quad (19)$$

可以得到广义气动力 $F_{a,i}^*$ 为

$$F_{a,i}^* = \iint_{S_B} \Delta p \frac{\partial W_B}{\partial q_i^*} dS + \iint_{S_P} \Delta p \frac{\partial W_P}{\partial q_i^*} dS \quad (20)$$

式中 S 为结构面积，下标 B 或 P 表示刚性前缘或柔性后缘； q_i^* 为以归一化处理后模态向量为基底的坐标。

将第 j 阶模态 $\bar{P}_j$ 带入式(1)-(3)可以得到板梁耦合模型所假设的相对位移 α_{Bj} , w_{Bj} 和 w_{Pj} 。进一步代入式(5)和(6)分别得到绝对位移场表示下的模态函数 $\phi_j(x, y)$

$$\phi_j(x, y) = w_{Bj} + \varepsilon\left(x - \frac{l_B}{2}\right)w_{Pj} + \left(x - \frac{l_B}{2}\right)\alpha_{Bj} \quad (21)$$

式中 $\varepsilon(x)$ 表示为阶跃函数： $\varepsilon(x) = 0(x \leq 0)$, $\varepsilon(x) = 1(x > 0)$ 。

以结构模态为基底的位移场 W 可表达为

$$W = \sum_{j=1}^{N_5} q_j^* \phi_j \quad (22)$$

将式(21)-(22)代入式(18)，并按照加速度、速度和位移项整理为矩阵形式，并将含有 $C(k)$ 与常数项分离，系数采用上标“0”和“c”区分。可以得到广义气动力的矩形形式 $\mathbf{F}_a^* \in \mathbb{C}^{N_5 \times N_5}$ 为

$$\mathbf{F}_a^* = \mathbf{M}_a^* \ddot{\mathbf{q}}^* + [\mathbf{C}_a^0 + \mathbf{C}_a^c C(k)] \dot{\mathbf{q}}^* + [\mathbf{K}_a^0 + \mathbf{K}_a^c C(k)] \mathbf{q}^* \quad (23)$$

由于 $C(k)$ 的表达式为超越函数的组合，仅能通过 MATLAB 的 `besselk` 函数插值近似。采用文献[36]相同的插值形式可得

$$C(k) = D + \sum_{p=1}^n \frac{C_p}{jk - A_p'} \quad (24)$$

式中 $j = \sqrt{-1}$ ；若选择 $n = 2$ ，则 $D = 0.508$, $A_1' = -0.376$, $A_2' = -0.091$, $C_1 = 0.086$, $C_2 = 0.022$ 。

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}_a^*) = \tilde{\mathbf{F}}_a^* = \{-\omega^2 \mathbf{M}_a + \omega[\mathbf{C}_a^0 + \mathbf{C}_a^c C(k)] + [\mathbf{K}_a^0 + \mathbf{K}_a^c C(k)]\} \tilde{\mathbf{q}}^* \quad (25)$$

记包含 $C(k)$ 的项为 $\mathbf{L}_a^c(\omega)$ ，并将减缩频率的表达式和式(24)代入 $C(k)$ 整理可得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_a^c(\omega) &= (\omega \mathbf{C}_a^c + \mathbf{K}_a^c) C(k) \tilde{\mathbf{q}}^* \\ &= \left\{ j\omega D \mathbf{C}_a^c + \left[D - \sum_{p=1}^n \frac{C_p}{A_p'^2 U_\infty} \right] \mathbf{K}_a^c + \sum_{p=1}^n \frac{j\omega}{j\omega b - A_p' U_\infty} \mathbf{V}_p \right\} \tilde{\mathbf{q}}^* \end{aligned} \quad (26)$$

式中

$$\mathbf{V}_p = C_p U_\infty \mathbf{C}_a^c + \frac{C_p b}{A_p'^2 U_\infty} \mathbf{K}_a^c \quad (p = 1 \dots n) \quad (27)$$

对式(26)逆傅里叶变换 $\mathcal{F}^{-1}$ 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a^c(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\mathbf{L}}_a^c(\omega)] \\ &= \mathbf{C}_{a,0}^c \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{K}_{a,0}^c \mathbf{q}^* + \sum_{p=1}^n \mathbf{V}_p \mathbf{z}_p \end{aligned} \quad (28)$$

式中

$$\mathbf{C}_{a,0}^c = D \mathbf{C}_a^c \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{a,0}^c = \left[D - \sum_{p=1}^n \frac{C_p}{A_p'^2 U_\infty} \right] \mathbf{K}_a^c \quad (30)$$

$$\mathbf{z}_p(t) = \int_{-\infty}^t e^{A_p' U_\infty(t-\tau)} \dot{\mathbf{q}}^* d\tau \in \mathbb{R}^{N_5 \times 1} \quad (31)$$

对式(31)求导可以得到

$$\dot{\mathbf{z}}_p = \dot{\mathbf{q}}^* - A_p' U_\infty \mathbf{z}_p \quad (32)$$

基于式(26)逆傅里叶变换的结果和式(25)其余项进行逆傅里叶变换可以得到时域的广义气动力 $\mathbf{F}_a^*$ 表达式

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a^* &= \mathbf{M}_a^* \ddot{\mathbf{q}}^* + (\mathbf{C}_{a,0}^* + \mathbf{C}_a^0) \dot{\mathbf{q}}^* + (\mathbf{K}_{a,0}^* + \mathbf{K}_a^0) \mathbf{q}^* + \sum_{p=1}^n \mathbf{V}_p \mathbf{z}_p \\ &= \mathbf{M}_a^* \ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}_a^* \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{K}_a^* \mathbf{q}^* + \sum_{p=1}^n \mathbf{V}_p \mathbf{z}_p \end{aligned} \quad (33)$$

进一步，整理可得降阶气动弹性模型为

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{q}^* - \sum_{p=1}^n \mathbf{V}_p \mathbf{z}_p = 0 \quad (34)$$

式中 $\mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{M}}^* - \mathbf{M}_a^*$, $\mathbf{C}^* = -\mathbf{C}_a^*$, $\mathbf{K}^* = \bar{\mathbf{K}}^* - \mathbf{K}_a^*$ 。

结合式(31)和(33)可以得到低维高精度气动弹性模型的经典状态空间方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s \mathbf{x} \quad (35)$$

式中

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{q}^{*T}, \dot{\mathbf{q}}^{*T}, \mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T\}^T \in \mathbb{R}^{4N_5 \times 1} \quad (36)$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{K}^* & -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{C}^* & -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{V}_1 & -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & A_1' \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2' \mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N_5 \times 4N_5} \quad (37)$$

系统矩阵 $\mathbf{A}_s$ 还由来流速度决定，通过 MATLAB 的 `eig` 函数求解其特征值并分析特征值实部。当实部为正时，则系统不稳定。若特征值为共轭复数，则系统发生颤振失稳，若特征值为实数，则系统发生静不稳定^[16]。

式(32)得到的气动质量矩阵、气动阻尼矩阵和气动刚度矩阵均为不对称矩阵，与经过模态解耦处理得到的结构质量矩阵和刚度矩阵均为对角矩阵，通过式(33)得到的动力学方程，可以发现在流体作用下引入不同广义坐标之间的耦合，这种耦合引起了系统的不稳定。

2 板梁耦合动力学模型实验验证

Kapania等^[40]评估针对柔性机翼提出的等效板模型的两个维度：静态变形和振动特性。为了验证1.1节提出的板梁耦合动力学模型在预测变后缘柔性翼结构响应的准确性，采用数值和实验方法从上述两个角度展开验证。为了简化变后缘柔性翼结构，并保留结构最主要的非均匀刚度特性，采用具有相同边界条件的变厚度阶梯悬臂板^[41]开展后续模型验证和气动弹性分析。

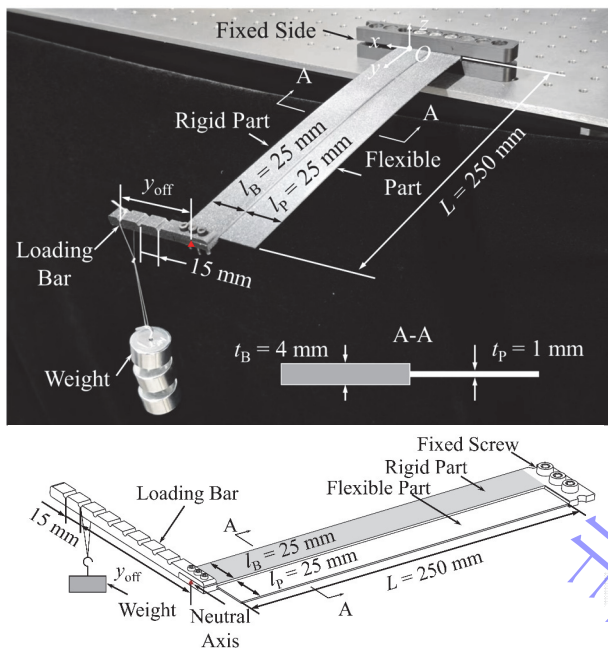
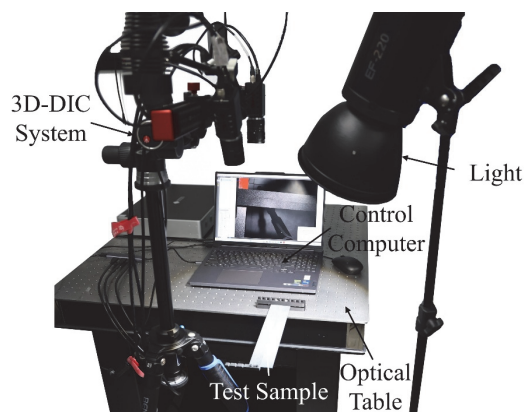


图 3 静态变形加载试方案

Fig. 3 Static deformation loading test scheme

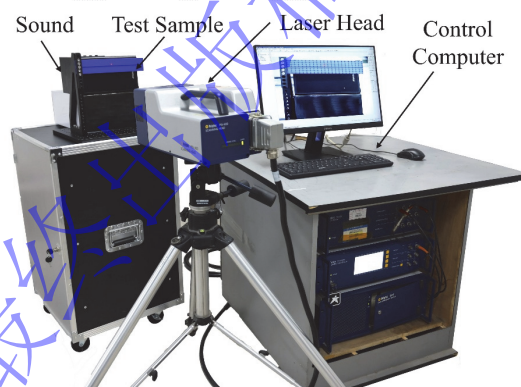
2.1 实验方案

本文试件采用Bambu PLA Basic材料和Bambu X1E 熔融沉积成型3D打印机加工而成，填充率设置为100%，层高为0.08mm。试件通过Solidworks进行建模，将模型导入至Bambu Studio软件进行切片，将前缘厚度面与打印板贴合，沿试件弦向加工成型。刚性部分和柔性部分通过3D打印一体成型，刚性前缘和柔性后缘之间的连接视为刚性连接。材料的密度通过电子天平测量相同加工参数的标准方块计算而得，成型后材料的杨氏模量通过拉伸试验机得到。密度为1180kg/m³，杨氏模量为2.44GPa，泊松比为0.3。本部分试验件的宽度 $c = 50$ mm，长度 $L = 250$ mm，刚性部分厚度 $t_B = 4$ mm，柔性段厚度 $t_P = 1$ mm，柔性部分占比 $f_{ef} = 50\%$ 。



(a) 静态变形测量

(a) Static deformation measurement



(b) 振动特性测量系统

(b) Vibration characteristic measurement

图 4 结构响应测量方案

Fig. 4 Structural response measurement scheme

为了验证模型在计算静态变形的能力，即评估式(17)结构刚度矩阵的准确性，本文设计了一种于刚性前缘中性轴末端处同时施加剪力和扭矩的实验方案，如图3所示。通过3D打印加工一根等距(15mm)分布限位槽的加载杆，并使用螺钉与试验件在端部固接，保证加载扭转中心位于刚性前缘的中性轴位置。通过在限位槽使用细线吊挂砝码，通过增减砝码和改变砝码的偏心距 y_{off} 模拟不同端部加载剪力和扭矩。

结构变形的测量采用3维数字图像相关(3D-DIC)系统，此技术是一种非接触式光学测量实验系统，通过追踪物体变形前后的散斑来获得全局位移场^[42]。静态变形测量方案如图4(a)所示，采用测量系统为千眼狼 RDIC-STDDH1200，在结构试件均匀喷涂散斑。通过全局位移场比较刚性部分的弯曲挠度、扭转角和柔性部分后缘处加载方向的绝对位移评估模型的准确性。

结构振动特性的测量采用多普勒激光测振仪，

其具有测量精度高、非接触式测量和测量速度快的优点^[42]。振动特性测量方案如图4(b)所示,将相同试件使用螺钉与基座固接,并在结构件后放置声激励源。本实验采用的设备为Polytec PSV-400,根据结构响应选择合适范围内的扫频信号,并使用激光头采集结构响应,根据结构响应分析而出结构的固有频率和振动模式。

2.2 静态变形验证

将图3中加载杆上所加载砝码的重力等效为中性轴处的扭矩 T 和剪力 F_Q ,施加位置为 $x_S = 0, y_S = 250\text{mm}$ 。外力功 W_F 为

$$W_F = T\alpha_B(y_S) + F_Q w_B(y_S) \quad (38)$$

将外力功对广义坐标 $\mathbf{q}^*$ 求偏导可得广义力列向量 $\mathbf{Q}_q^*$

$$\mathbf{Q}_q^* = \partial W_F / \partial \mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{N_5 \times 1} \quad (39)$$

广义坐标下的平衡方程为

$$\bar{\mathbf{K}}^* \mathbf{q}^* = \mathbf{Q}_q^* \quad (40)$$

得到的解代入式(21)即可得到位移场。通过挂置1个至5个50g砝码,并保持 $y_{\text{off}} = 12.75\text{mm}$ 。如图5为挂置5个50g砝码时的工业相机所采集的画面和分析得到的位移场,右上角小图中结构上的白色斑点即为所喷涂散斑。

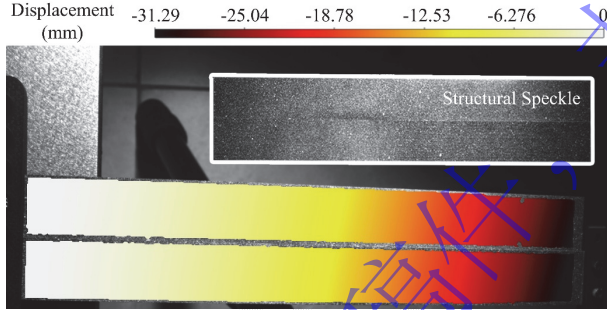
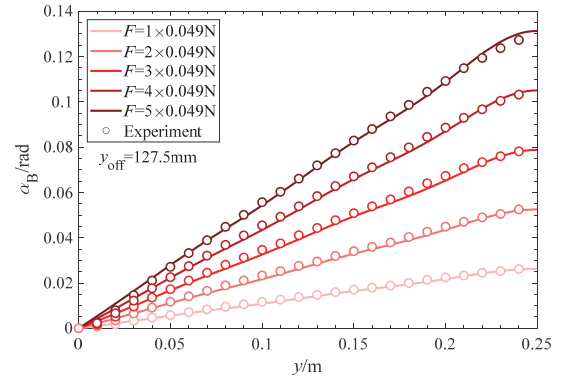


图 5 测量位移场与结构散斑

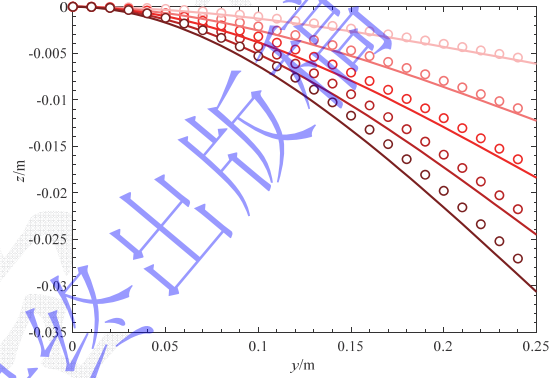
Fig. 5 Displacement field and structural speckle

经过分析处理得到刚性部分的弯曲挠度、扭转角和柔性部分后缘处加载方向的绝对位移分别如图6(a)-(c)所示。可以发现,实线所示的解析模型结果与圆点所标出的测量结果相比吻合较好。在扭转计算方面,由于使用扭转振动模态 $\alpha_i = \sin(2i\pi x/L)$ ^[16]作为假设形态函数,该函数在末端($x = L$)导数均为0,表示末端向内的扭矩内力在较小区间内由0逐渐增加至所施加扭矩,显然与集中力边界不同,因此实验结果在末端与实验结果具有偏差。在挠度计算方面,随着变形尺度的增加误差变大,且普遍预测偏大,因此在较大范围的变形时线性模型无法计算几何非线性引起的刚度增强。



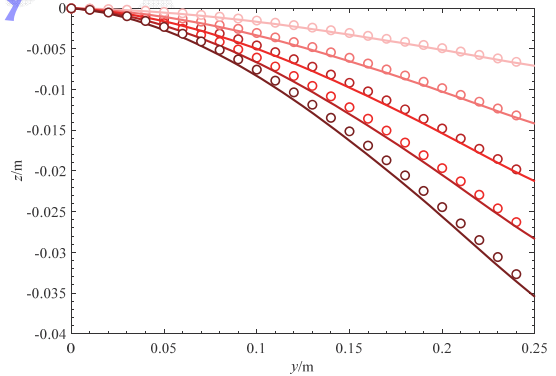
(a) 刚性部分的扭转角分布

(a) Torsion angle of the rigid part



(b) 刚性部分的弯曲挠度分布

(b) Deflection of the rigid part



(c) 柔性部分后缘处的绝对位移

(c) Absolute displacement at the trailing edge of the flexible part

图 6 结构静态位移

Fig. 6 Static displacement

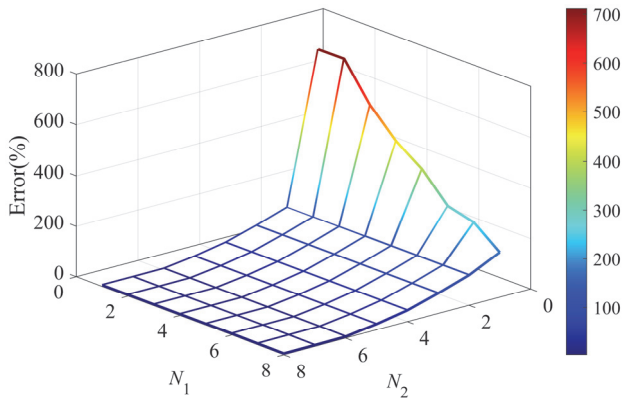


图 7 前10阶固有频率的最大误差

Fig. 7 The maximum error of the first 10 natural frequencies

2.3 振动特性验证

本部分通过比较计算得到的固有频率和结构模态验证1.1节板梁耦合动力学模型的准确性。由于后续需使用Nastran建立气动弹性模型，在本节采用Nastran建立有限元模型以验证数值模型的准确性。实验测量和有限元模型计算得到的固有频率如表1所示。

式(1)-(3)中在假设刚性部分的弯曲挠度、扭转角和柔性部分弦向函数、展向函数的假设形态函数的截断项数分别为 N_1, N_2, N_3 和 N_4 。由于柔性后缘高阶弦向弯曲频率较高，可以保持 N_3 为常数，主要研究展向弯曲和扭转角假设形态函数的数量的影响，因此本部分设置 $N_3 = 2, N_1 = N_4$ 。以实验测得的实验频率为基准，计算假设形态函数的截断数量对前10阶固有频率的最大误差，误差云图如图7所示。随着假设函数的截断项数增加，固有频率的最大误差快速下降并收敛至恒定值2.23%。

表1中的解析结果选用的 $N_1 = N_4 = 5$ 和 $N_2 = 5$ 。如图8-10分别为与表1一致的实验、数值和解析模型得到的前10阶结构模态。通过三个模型的比较可以发现，本文得到的解析模型在采用较少假设形态函数就可以准确地计算结构的弯曲和扭转模态，采用

有限元建立的数值模型也具有较高精度。结合结构模态和表1中的振动频率可以发现，在弯曲模态固有频率计算误差小于4%，在扭转模态固有频率计算误差小于8%。扭转模态计算出现的误差主要来源于没有正确处理扭转时的翘曲。理论模型中梁扭转刚度正确的考虑翘曲导致的刚度减弱，但板模型不能考虑导致柔性后缘的扭转刚度计算偏大^[17]，引起理论模型的扭转频率大于实验结果。在Nastran有限元软件中，梁单元属性定义卡片不能考虑翘曲对梁扭转刚度的影响，导致两部分的扭转刚度均计算偏大，使得数值计算频率大于理论和实验结果。

图11(a)中的前五阶模态，弯曲频率随着柔性比的增加下降，但是扭转频率随着柔性比的增加出现了先增加后减小。图11(b)中，高阶模态的固有频率的变化基本为先增后减。根据频率重合理论^[15]，对于弯扭耦合颤振，弯曲模态频率和扭转模态频率的分支接近意味着两个模态的耦合性增强，使两个耦合振动很有可能气流中吸取能量，诱发颤振。在后续气动弹性的分析时可以关注柔性比变化对颤振速度的影响。

表1 结构固有频率

Modal	Experiment (Hz)	Numerical (Hz)	Analytical (Hz)	Error (%)
1	13.395	13.394	13.397	0.014
2	84.836	83.250	83.244	1.877
3	131.18	145.36	138.81	5.816
4	228.88	226.86	226.89	0.875
5	315.32	344.35	336.62	6.753
6	386.23	396.82	395.82	2.482
7	427.28	459.55	460.08	7.676
8	516.25	529.51	530.81	2.820
9	580.46	595.06	602.71	3.833
10	644.67	657.11	677.82	5.143

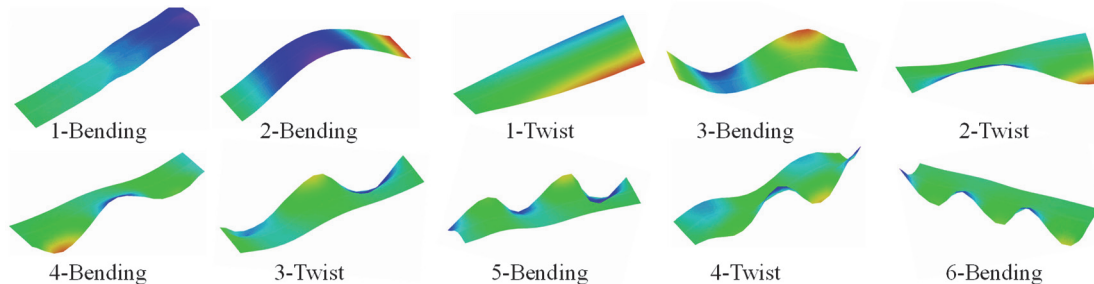


图 8 实验前10阶振动模态

Fig. 8 The first 10 order structural vibration modes measured experimentally

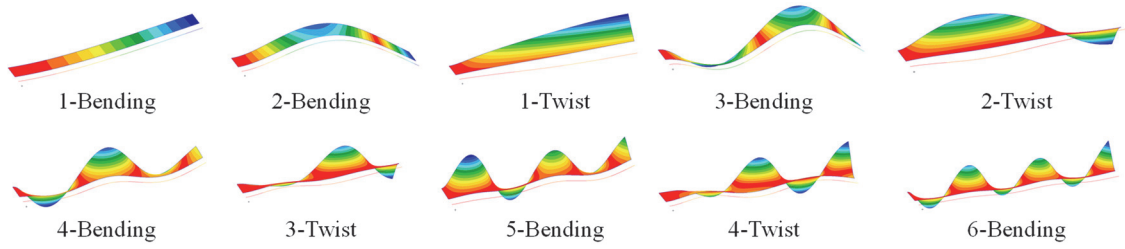


图 9 数值计算得到的前10阶振动模态

Fig. 9 The first 10 vibration modes obtained by numerical calculation

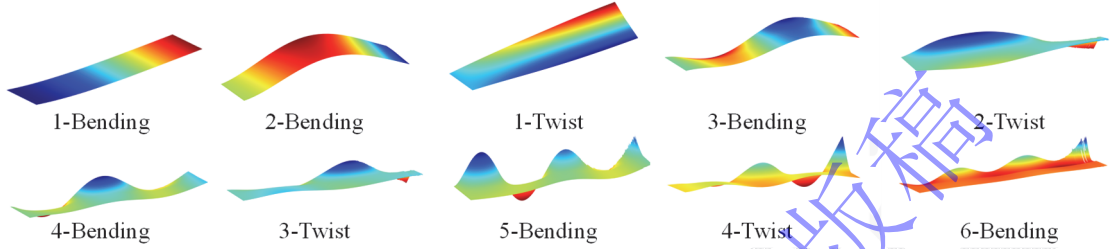
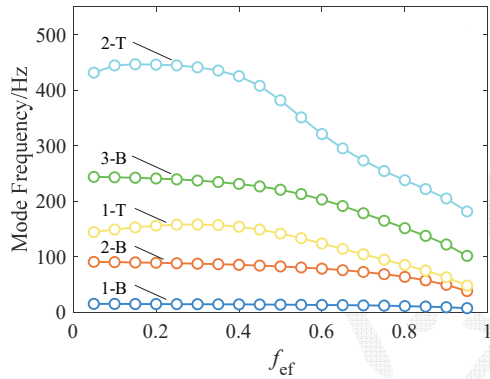


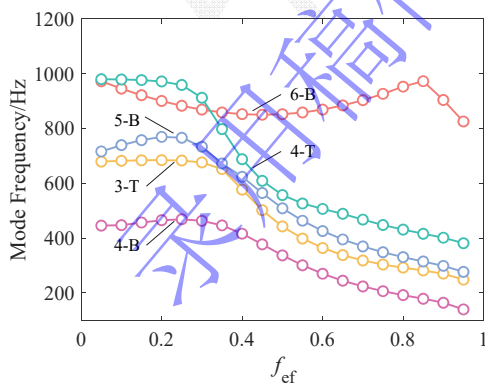
图 10 解析模型计算得到的前10阶振动模态

Fig. 10 The first 10 order vibration modes calculated by the analytical model



(a) 前五阶固有频率

(a) The first five natural frequencies



(b) 第六阶至第十阶固有频率

(b) The sixth to tenth natural frequencies

图 11 结构固有频率与柔性比之间的关系(B: 弯曲, T: 扭转)

Fig. 11 The relationship between natural frequency and flexibility ratio of structure(B: Bending, T: Torsion)

3 气动弹性模型验证与结果分析

3.1 悬臂梁颤振实验验证

为了验证1.2节提出的低维气动弹性模型的准确性，与悬臂梁风洞实验^[43]测得颤振速度和颤振频率进行比较。

本文模型中将柔性占比设置为0%和100%表示采用梁理论和板理论建模等截面悬臂梁，模态截断阶数 N_5 选择为10以保证收敛。实验^[43]采用的悬臂板厚度、弦长分别为0.381mm和55mm，展弦比为5，材料的杨氏模量、泊松比和密度分别为72GPa、0.3和2840kg/m³，来流密度为1.200kg/m³。

图12为系统矩阵的特征值实部随着来流速度变化图，当特征值为正表明系统不稳定。梁和板气弹模型计算得到的颤振速度分别为17.5m/s和18.8m/s，颤振频率分别为29.58Hz和27.78Hz。实验测得的颤振速度为16.7m/s，颤振频率为28.63Hz，气动弹性模型和实验结果吻合较好。

3.2 变后缘柔性翼颤振分析

本部分选用的结构模型仍为根据变后缘柔性翼刚度特性分布并忽略刚度和质量非均匀特性简化而得的阶梯变厚度悬臂板模型。由于第2节在实验时受到加工尺寸限制，弦长选取较小，在本节中其余参数(包括材料、各部分厚度)保持一致，参考前期研究尺寸^[36]，弦长选择为254mm，展弦比为5保持不变。

本部分模态截断阶数 N_5 选择为6，即考虑前6阶

模态。在商用有限元软件Nastran中，使用CBEAM和CQUAB4对梁和板单元进行建模，使用RBAR实现相同展向位置的梁单元和连接处板单元的节点耦合。单元尺寸设置为1mm。使用气动弹性求解序列SOL145计算颤振特性，使用pk法求解，设置参考 $Ma = 0$ 。使用偶极子网格法对非定常气动力进行建模。梁单元与气动网格之间的插值方法选择为IBS插值方法，板单元与气动网格之间的插值方法为IPS插值方法。建立的Nastran有限元结构模型中共计含有4800个自由度，而本文建立的低维气动弹性状态方程仅包含 $4N_5=24$ 个状态变量。相较于数值模型，计算效率将会显著提高。

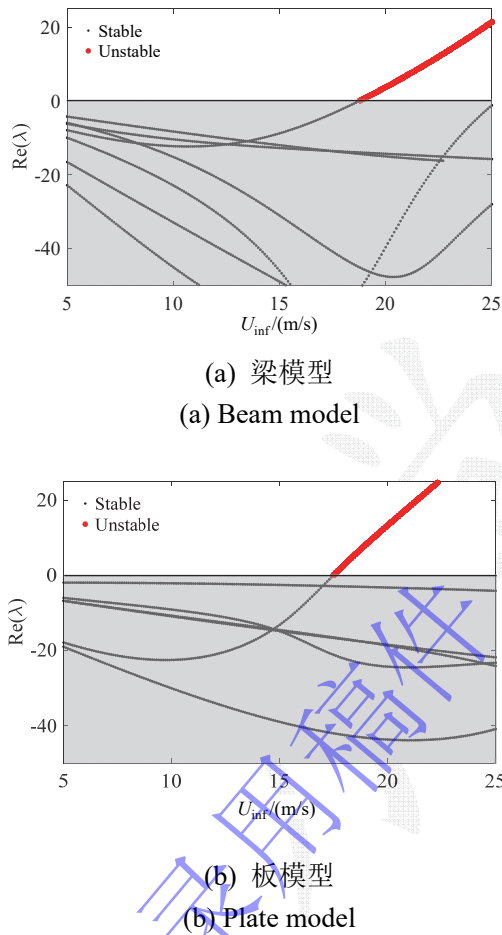
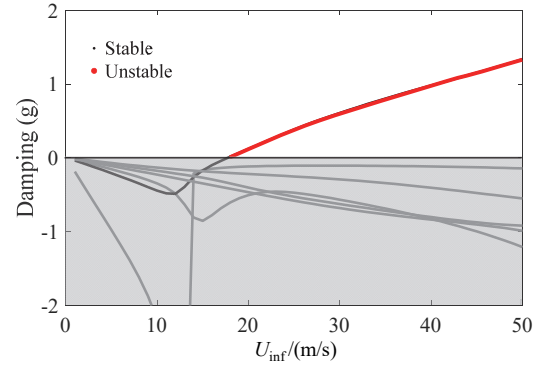


图 12 悬臂梁颤振计算结果

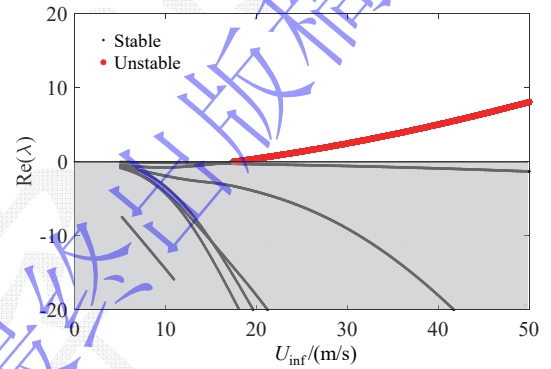
Fig. 12 Flutter calculation results of cantilever beam

如图13(a)为Nastran计算得到的V-g图，图13(b)为本文解析模型计算得到的速度-特征值实部图。Nastran计算得到颤振速度、频率和**发生颤振失稳的模式分支**分别为17.70m/s、4.57Hz和二阶弯曲，本文气弹模型得到的颤振速度、频率和**发生颤振失稳的模式分支**分别为17.80m/s、3.52Hz和二阶弯曲。



(a) Nastran模型

(a) Nastran model



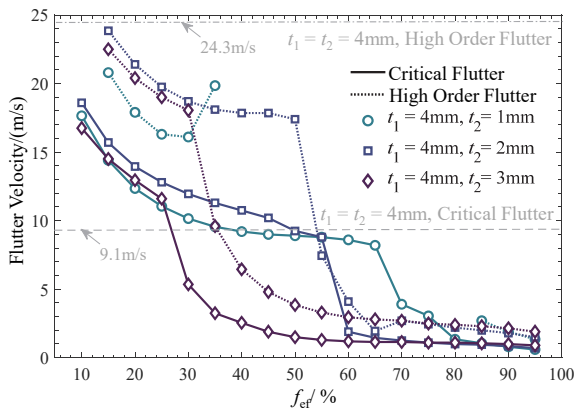
(b) 解析模型

(b) Analytical model

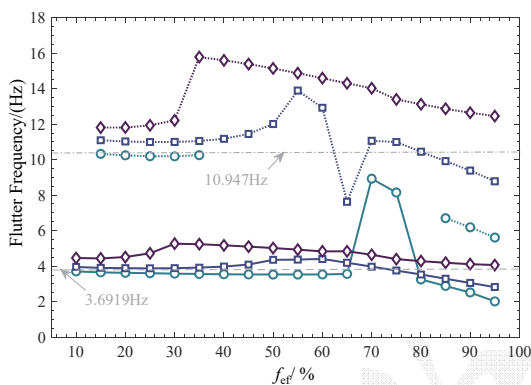
图 13 阶梯变厚度悬臂板颤振计算结果

Fig. 13 Flutter calculation results of stepped cantilever plate

在2.3节中，变后缘翼关键结构参数柔性占比变化时，结构的振动特性发生变化，必然会改变系统的气动弹性特性。图14为改变柔性比和结构厚度，本文建立的低维气动弹性模型计算得到的颤振速度和颤振频率。随着柔性比的增加临界颤振速度下降，并且在某一临界柔性占比处出现突然下降并稳定至恒定值，临界颤振频率的变化相对较为平缓。临界颤振表示所有不稳定分支对应最小的颤振速度，在图中采用实线表示。本文称高于3阶模态发生颤振称为高阶模态颤振，一般情况高阶模态颤振速度大于临界颤振速度，在图中采用虚线表示。如图15所示为阶梯变厚度悬臂板A颤振计算结果，其参数为： $t_1 = 4\text{mm}$ ， $t_2 = 1\text{mm}$ ， $f_{ef} = 25\%$ 。其二弯模态分支发生颤振速度小于三弯模态分支，称三弯模态分支发生颤振时为高阶模态颤振。



(a) 颤振速度
(a) Flutter velocity



(b) 颤振频率
(b) Flutter frequency

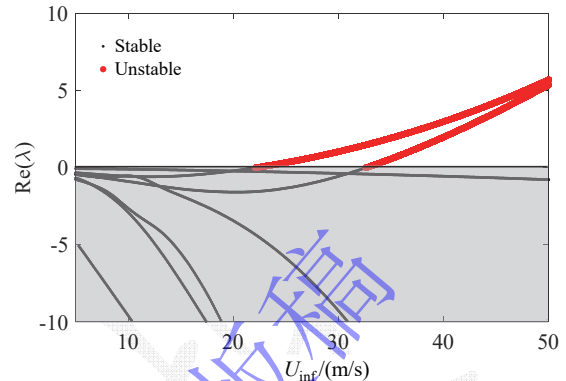
图 14 变柔性比计算结果

Fig. 14 Calculation result of variable flexibility ratio

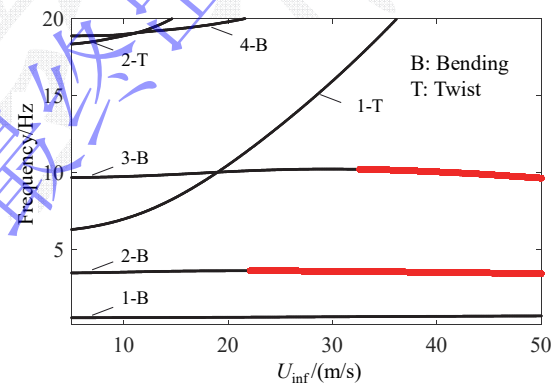
图14中柔性后缘厚度对颤振速度的影响也较大,尤其是颤振速度出现突然下降的临界柔性占比的位置,随着后缘厚度的增加反而越小。厚度在柔性占比小于突变位置之前,对临界颤振速度并无较大影响。对于高阶模态颤振和临界颤振之间的关系,柔性占比较小时,前者大于后者。但是柔性占比较大时,临界颤振有可能发生于高阶模态。如图16为阶梯变厚度悬臂板B颤振计算结果,其参数为: $t_1 = 4\text{mm}$, $t_2 = 1\text{mm}$, $f_{ef} = 75\%$ 。其二扭模态分支发生了“柔和颤振”[15],二弯模态分支发生了“突发颤振”[15],但柔和颤振速度小于突发颤振速度。

从发生颤振失稳的模态分支角度分析,当 $t_2 = 1\text{mm}$ 时,发生颤振失稳的模态分支于 $f_{ef} = 65\%$ 和 75% 处,由二弯分支变为二扭分支再到一扭分支。这种失稳模态分支的突变导致图14中,在柔性占比在 65% 和 75% 处出现颤振速度和颤振频率的两次突变。当 $t_2 = 2\text{mm}$ 和 3mm 时,分别于 $f_{ef} = 50\%$ 和 20% 处,颤振颤振失稳的模态分支出现由二弯分支变为一扭分支,

也对应图14(a)中颤振速度的突降。后缘厚度的增加会引起发生颤振失稳的模态分支在柔性占比变化时提前发生切换,进而引起颤振速度的突降。这种参数光滑变化但颤振速度或频率突变的现象称为“模态突变”,在颤振研究中广泛发现[25,27,29]。



(a) 特征值实部-速度图
(a) Eigenvalue real part-velocity



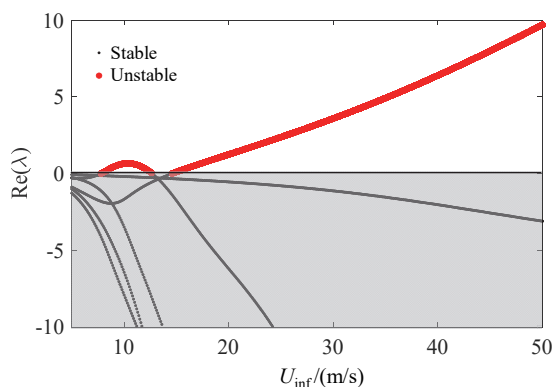
(b) 频率-速度图

(b) Frequency-velocity

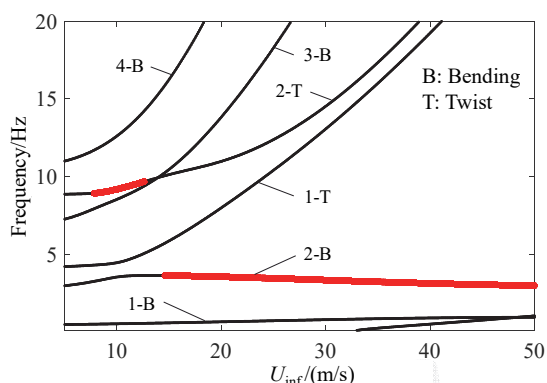
图 15 阶梯变厚度悬臂板A颤振计算结果

Fig. 15 Flutter calculation results of stepped cantilever plate A

图14中灰色线表示厚度均为4mm悬臂板的临界颤振和高阶颤振速度的计算结果。在较小的柔性占比时,包含变后缘部分的柔性翼颤振速度比不包含变后缘部分的等截面悬臂翼颤振速度更大,在较大柔性占比时包含变后缘部分会大幅降低颤振速度。更需要指出,对于高阶模态颤振,包含变后缘部分均会导致这一类型颤振速度的下降,显然系统在实际情况并不会发生该类型颤振。总体而言,变后缘部分的存在不一定导致颤振速度的下降。在柔性占比较小时,反而提高了颤振速度。



(a) 特征值实部-速度图
(a) Eigenvalue real part-velocity

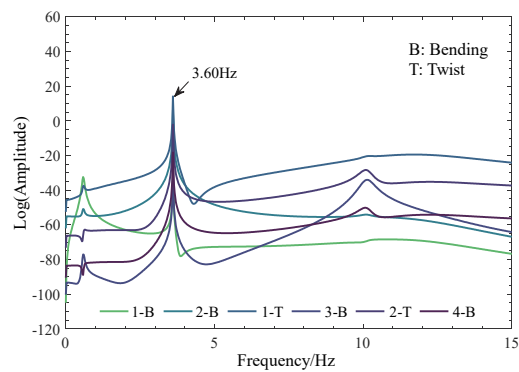


(b) 频率-速度图
(b) Frequency-velocity

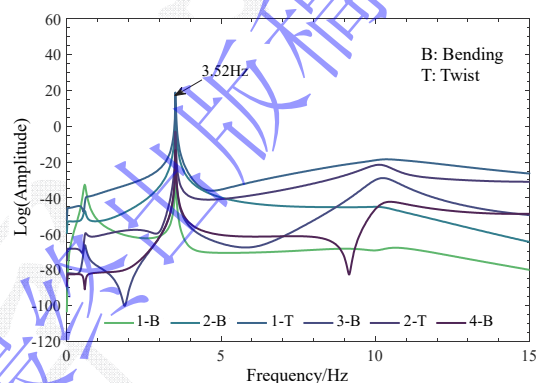
图 16 阶梯变厚度悬臂板B颤振计算结果

Fig. 16 Flutter calculation results of stepped cantilever plate B

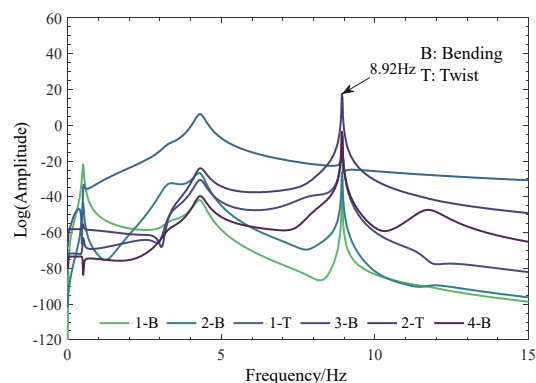
进一步分析不同柔性占比时颤振发生时的模式成分，对系统方程(34)在颤振临界速度时采用龙格库塔法进行数值求解，保持 $t_1 = 4\text{mm}$ ， $t_2 = 1\text{mm}$ 。对模态时域响应进行快速傅里叶变换，结果如图17，均出现若干明显的峰值。在柔性占比相对较小时，1阶扭转和2阶弯曲为主要振动模式，如图17(a)和(b)所示，除1阶弯曲，各阶振动的主峰均为颤振频率。图17(c)中对应参数与图16中一致，可以发现颤振发生时振动主峰发生较大变化，且2阶扭转和3阶弯曲为主要振动模式，除1阶弯曲和1阶扭转，各阶振动主峰均为颤振频率。



(a) 柔性比例 = 25%
(a) $f_{ef} = 25\%$



(b) 柔性比例 = 50%
(b) $f_{ef} = 50\%$



(c) 柔性比例 = 75%
(c) $f_{ef} = 75\%$

图 17 不同柔性比例的频谱分析结果

Fig. 17 Spectral analysis results of different flexible ratios

4 结 论

本文采用瑞丽-里茨假设形态法将变后缘柔性翼的刚性前缘和柔性后缘分别建模为欧拉梁和基尔霍夫板。将片条理论和二维非定常气动力理论结合，在计算所得模态空间建立低维高精度气动弹性模型。

主要结论如下:

1) 所建立的板梁耦合动力学模型能够准确反映结构在静态载荷和振动激励下的结构响应。基于线性假设的模型在小变形范围内,对刚性前缘的弯曲、扭转和柔性后缘的面外变形保持较高的计算精度,但随变形较大时结构刚度计算偏小。通过与实验模态测试结果对比,前10阶固有频率的计算中表现出小于2.23%的计算误差,各阶模态计算也吻合较好。

2) 所建立的低维高精度气动弹性模型,通过与悬臂板风洞试验和Nastran有限元建立的气动弹性数值模型对比,可以发现针对同一悬臂板,本文提出的梁模型和板模型在气弹计算时略有偏差,但与实验结果对比发现均在误差范围内。对于刚度特性与变后缘柔性翼相同的阶梯悬臂板,本文的板梁耦合气动弹性模型与数值模型计算得到的颤振结果吻合较好。

3) 基于本文提出的气动弹性模型可以发现柔性占比和柔性段厚度对颤振速度和颤振模态影响较大。柔性占比越大,颤振速度越小,颤振频率基本不变。柔性段厚度主要影响颤振速度突然下降的临界柔性占比。“模态突变”现象会导致颤振速度和频率的突变。包含变后缘部分的柔性翼,在柔性占比小时相较于相同几何参数和材料特性的等截面悬臂机翼可以提升颤振速度。

参考文献

- 1 BARBARINO S, BILGEN O, AJAJ R-M, et al. A review of morphing aircraft. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2011, 22(9): 823-77.
- 2 MOWLA M N, ASADI D, DURHASAN T, et al. Recent advancements in morphing applications: Architecture, artificial intelligence integration, challenges, and future trends-a comprehensive survey. *Aerospace Science and Technology*, 2025, 161.
- 3 万芸怡, 黄锐, 刘豪杰. 基于数据驱动的变体机翼跨声速颤振分析. *力学学报*, 2025, 57(2): 523-534. (Wan Yunyi, Huang Rui, Liu Haojie. Transonic flutter analysis of a morphing wing via data driven method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(2): 523-534 (in Chinese)).
- 4 HOLLENBECK A C, GRANDHI R, HANSEN J H, et al. Bioinspired artificial hair sensors for flight-by-feel of unmanned aerial vehicles: a review. *AIAA Journal*, 2023, 61(12): 5206-31.
- 5 吴康灵, 叶正寅, 叶坤等. 鸟类羽毛在气流中变形的力学特性研究. *力学学报*, 2023, 55(4): 874-884 (Wu Kangling, Ye Zhengyin, Ye Kun, et al. Mechanical characteristics of the deformation of bird feathers in airflow. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(4): 874-884 (in Chinese)).
- 6 SHI R, WAN W. Analysis of flight dynamics for large-scale morphing aircraft. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2015, 87(1): 38-44.
- 7 AJAJ R M, BEAVERSTOCK C S, FRISWELL M I. Morphing aircraft: the need for a new design philosophy. *Aerospace Science and Technology*, 2016, 49: 154-66.
- 8 CONCILIO A, DIMINO I, PECORA R. SARISTU: adaptive trailing edge device (ATED) design process review. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34(7): 187-210.
- 9 张旭辉, 解春雷, 刘思佳等. 智能变形飞行器发展需求及难点分析. *航空学报*, 2023, 44(21): 8-34. (Zhang Xuhui, Xie Chunlei, Liu Sijia, et al. Development needs and difficulty analysis for smart morphing aircraft. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2023, 44(21): 8-34 (in Chinese)).
- 10 徐波, 于超, 王宠等. 基于相场模拟的应力辅助时效的NiTi形状记忆合金功能性能研究. *力学学报*, 2024, 56(12): 3507-3520 (Xu Bo, Yu Chao, Wang Chong, et al. Phase-field simulation on the functional properties of stress-assisted aging NiTi shape memory alloys. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(12): 3507-3520 (in Chinese)).
- 11 KIM M S, HEO J K, RODRIGUE H, et al. Shape Memory Alloy (SMA) Actuators: The Role of Material, Form, and Scaling Effects. *Advanced Materials*, 2023, 35(33).
- 12 PARANCHEERIVILAKKATHIL M S, PILAKKADAN J S, AJAJ R M, et al. A review of control strategies used for morphing aircraft applications. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2024, 37(4): 436-63.
- 13 GU X, YANG K, WU M, et al. Integrated optimization design of smart morphing wing for accurate shape control. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34(1): 135-47.
- 14 AJAJ R M, PARANCHEERIVILAKKATHIL M S, AMOOZGAR M, et al. Recent developments in the aeroelasticity of morphing aircraft. *Progress in Aerospace Sciences*, 2021, 120.
- 15 ZHU J H, YANG J N, ZHANG W H, et al. Design and applications of morphing aircraft and their structures. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2023, 18(3).
- 16 BISPLINGHOFF R L, ASHLEY H. Principles of aeroelasticity. *Courier Corporation*, 2013.
- 17 MODARESS-AVAL A H, BAKHTIARI-NEJAD F, DOWELL E H, et al. Comparative study of beam and plate theories for moderate aspect ratio wings. *AIAA Journal*, 2023, 61(2): 859-74.
- 18 MODARESS-AVAL A H, BAKHTIARI-NEJAD F, DOWELL E H, et

- al. Aeroelastic analysis of cantilever plates using Peters' aerodynamic model, and the influence of choosing beam or plate theories as the structural model. *Journal of Fluids and Structures*, 2020, 96.
- 19 MODARESS-AVAL A H, BAKHTIARI-NEJAD F, DOWELL E H, et al. A comparative study of nonlinear aeroelastic models for high aspect ratio wings. *Journal of Fluids and Structures*, 2019, 85: 249-74.
- 20 GU H, HEALY F, REZGUI D, et al. Sizing of high-aspect-ratio wings with folding wingtips. *Journal of Aircraft*, 2023, 60(2): 461-75.
- 21 DOWELL E H. Aeroelasticity of plates and shells. *Springer Science & Business Media*, 1974.
- 22 DOWELL E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate. *AIAA Journal*, 1966, 4(7): 1267-75.
- 23 DOWELL E H. Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II. *AIAA Journal*, 1967, 5(10): 1856-62.
- 24 KATZ J, PLOTKIN A. Low-speed aerodynamics. *Cambridge university press*, 2001.
- 25 ARGENTINA M, MAHADEVAN L. Fluid-flow-induced flutter of a flag. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2005, 102(6): 1829-34.
- 26 TANG D M, YAMAMOTO H, H. DOWELL E. Flutter and limit cycle oscillations of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2003, 17(2): 225-42.
- 27 ELOY C, SOUILLIEZ C, SCHOUVEILER L. Flutter of a rectangular plate. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, 23(6): 904-19.
- 28 TANG L, PAIDOUSSIS M P. On the instability and the post-critical behaviour of two-dimensional cantilevered flexible plate's in axial flow. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 305(1-2): 97-115.
- 29 DE BREUKER R, ABDALLA M M, GURDAL Z. Flutter of partially rigid cantilevered two-dimensional plates in axial flow. *AIAA Journal*, 2008, 46(4): 936-46.
- 30 PETERS D A, HSIEH M-C A, TORRERO A. A state-space airloads theory for flexible airfoils. *Journal of the American Helicopter Society*, 2007, 52(4).
- 31 WALKER W P, PATIL M J. Unsteady Aerodynamics of Deformable Thin Airfoils. *Journal of Aircraft*, 2014, 51(6): 1673-80.
- 32 WOODS B K S, FRISWELL M I. Preliminary Investigation of a Fishbone Active Camber Concept//Proceedings of the ASME 2012 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, Georgia: ASME, 2012: 8058.
- 33 WOODS B K S, DAYYANI I, FRISWELL M I. Fluid/structure-interaction analysis of the Fish-Bone-Active-Camber morphing concept. *Journal of Aircraft*, 2015, 52(1): 307-19.
- 34 RIVERO A E, WEAVER P M, COOPER J E, et al. Parametric structural modelling of fish bone active camber morphing aerofoils. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, 29(9): 2008-26.
- 35 RIVERO A E, COOPER J E, WOODS B K S. Numerically efficient three-dimensional fluid-structure interaction analysis for composite camber morphing aerostructures[C]//AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando: AIAA, 2020: 1298.
- 36 ZHANG J, SHAW A D, WANG C, et al. Aeroelastic model and analysis of an active camber morphing wing [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2021, 111.
- 37 黄可, 张家应, 王青云. 基于非均匀梁模型的二维柔性机翼固有振动分析[J]. *力学学报*, 2023, 55(2): 487-496 (Huang Ke, Zhang Jiaying, Wang Qingyun. Natural vibration analysis of two-dimensional flexible wing based on non-uniform beam model[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(2): 487-496(in Chinese)).
- 38 赵永辉, 黄锐. 高等气动弹性力学与控制. 北京: 科学出版社, 2015 (Zhao Yonghui, Huang Rui. *Advanced Aeroelasticity and Control*. Beijing: China Science Publishing Press, 2015 (in Chinese)).
- 39 刘永平, 张朋, 曾开春, 等. 基于Theodorsen理论的跨声速颤振非定常气动力建模. *航空学报*, 2025, 46(12): 231434 (Liu Yongping, Zhang Peng, Zeng Kaichun, et al. Unsteady aerodynamic modeling for transonic flutter based on Theodorsen's theory. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2025, 46(12): 231434 (in Chinese)).
- 40 KAPANIA R K, LIU Y H. Static and vibration analyses of general wing structures using equivalent-plate models. *AIAA Journal*, 2000, 38(7): 1269-77.
- 41 DUAN G H, WANG X W. Vibration analysis of stepped rectangular plates by the discrete singular convolution algorithm. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014, 82: 100-9.
- 42 赵寿根. 振动测试、信号分析与应用[M]. 北京航空航天大学出版社, 2023 (Zhao Shougen. *Vibration testing, signal analysis and application*. Beihang University Press, 2023 (in Chinese)).
- 43 GIBBS S C, SETHNA A, WANG I, et al. Aeroelastic stability of a cantilevered plate in yawed subsonic flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2014, 49: 450-62.