

# 双稳态复合材料层合板的非线性动力学特性及其共振驱动

刘雨婷, 张家应\*

\* (北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 在变体飞行器设计、流动控制和能量采集等领域, 多稳态结构动力学特性为实现结构形状动态变化提供了一种新思路, 其独特的非线性特性和局部强稳定性为研究变体结构提供了重要的理论基础和应用价值。本文将非对称双稳态层合板为研究对象, 分析中点固定四边自由边界条件对其稳定构型的影响, 同时研究各稳定构型的非线性动力学特性及其在不同激励水平下的结构响应。并基于哈密顿原理和瑞利里兹法建立双稳态层合板的理论预测模型, 模拟激励器施加正弦外部激励。对比有限元仿真和解析结果, 优化双稳态结构的共振驱动跳变方法, 并确定其单阱振动和阱间振动的实现条件。

**关键词:** 双稳态层板; 非线性动力学; 共振驱动; 快速响应; 数值仿真

## Nonlinear Dynamic Characteristics and Resonant Actuation of Bi-stable Composite Laminates

Yuting Liu, Jiaying Zhang\*

\* (School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** In the fields of morphing aircraft design, flow control and broadband energy harvesting, the dynamic characteristics of multi-stable structure provide an idea for realizing the dynamic change of structure shape. Its unique nonlinear characteristics and local strong stability have important theoretical basis and application value for the study of variant structure. Taking bi-stable laminates as the research object, this paper analyzes the nonlinear dynamic characteristics of each stable configuration and its structural response under different excitation levels with the plates are clamped at the center and free at four edges. Based on Hamilton principle and Rayleigh Ritz method, the theoretical prediction model of bi-stable laminated plate is established, and the sinusoidal external excitation is simulated. By comparing the results of finite element simulation and analysis, the resonant actuation method of bi-stable structure is optimized, and the realization conditions of single-well vibration and cross-well vibration are determined.

**Keywords:** bi-stable composite laminate; nonlinear dynamics; resonant driving; quick response

## 0 引言

随着现代科学技术的发展和人类航空航天活动任务的增加, 现代飞行器不断向新的飞行高度、飞行速度和飞行距离方向发展, 因此如何利用飞行器结构中的固有力学特性, 设计轻量化, 简单化和智能化的高可靠性飞行器结构, 从而实现高效率的飞行任务已成为国际工程领域

1981年, Hyer观察到非对称复合材料层合板在固化后的双稳态特征并展开研究[1], 基于最小势能原理和瑞利里兹法, 提出和优化了非对称双稳态层合板的理论预测模型[2-3]。根据经典层合板理论预测, 任意尺寸的非对称正交层合板在固化冷却后是马鞍形, 而实验结果表明, 非对称正交层合板的固化后最终形态是圆柱形, 如图1所示。考虑到中等宽厚比的层合板内存在大量的剪切应变, Jun等人提出了包括面内剪切应变的新模型[4], 随后又推导任意铺层角度的双稳态层合板的稳定构型预测公式[5]。此前, 在中心固定, 四边自由的边界条件下, 研究者们又陆续建立更精确的双稳态层合板的理论模型[6-7], 随后, Brunetti提出了悬臂边界条件下的理论预测模型[8-9], 并用有限元软件ABAQUS和实验进行论证。

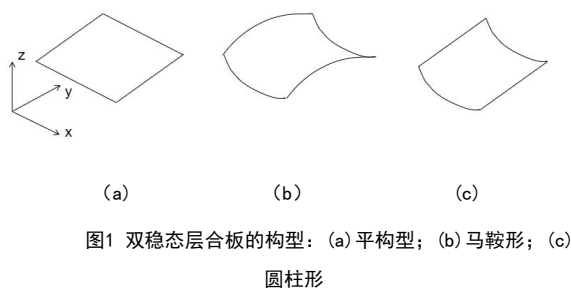


图1 双稳态层合板的构型: (a) 平构型; (b) 马鞍形; (c) 圆柱形

Fig. 2 Configurations of bi-stable cross-ply laminate

稳定构型之间通过大变形, 实现快速转换的现象称为跳变, 这种现象具有很强的非线性。2009年, Arrieta等人运动哈密顿原理和瑞利里兹法, 建立了动力学模型, 研究双稳态层合板在集中力下的准静态跳变行为, 并表明惯性项和阻尼项对驱动的影响[10]。Wilkie等[11]人和Hyer[12]等人分别提出了利用智能压电材料MFC (Macro-Fiber Composite) 和形状记忆合金 (SMA) 准静态驱动双稳态层合板发生跳变的方法。随后, 为了提高驱动效率, 简化实现条件, 基于双稳态层合板稳定构型的模态频率, Senba[13]等人提出了MFC

实现动态驱动悬臂的双稳态层合板, 证明动态驱动使跳变所需要的能量变少。Zhang[15]等人从理论和实验上研究了激振器激励下双稳态层合板的跳变现象和非线性振动, 首次提出通过时变主曲率描述双稳态层合板的跳变。Arrieta[14]结合了激振器驱动和MFC驱动方法, 通过理论和实验测定跳变所需的条件。

如何突破双稳态层合板的应用难题, 重点在于掌握跳变的力学特性和如何驱动跳变。研究表明动态驱动所需的驱动力的极值远小于静态驱动, 因此本文提出了基于的双稳态结构一阶线性共振频率的动态驱动策略。下图显示了双稳态层合板的两种稳定构型, 稳定构型 I 和稳定构型 II。当振幅很小时, 系统的响应近似为线性, 振幅逐渐增大, 出现非线性特征。当响应的振幅达到临界值时, 结构发生跳变。当稳定构型的共振频率不同时, 可通过调整外部激励力的频率实现单向跳变, 如图 2(a)所示。双稳定结构具有两个局部势能井, 在外部激励的作用下, 当双稳定结构的势能高于两个稳定构型之间的能量势垒, 将发生跳变。对称层板的两种稳定构型之间的模态频率完全相同, 如图 2(b)的虚线所示, 非对称层合板的两个稳定构型具有不同的模态频率, 如图 2(b)的实线所示。因此本文引入非对称性, 更有利于实现所需方向的单向跳变, 并且为了双稳定结构的变形更可控, 稳定构型的模态频率之间需要有足够大的差异。

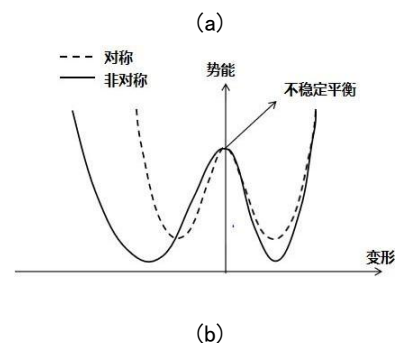
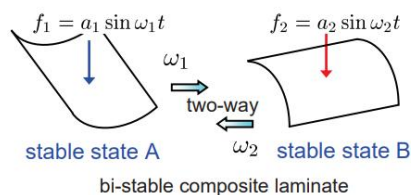


图2 (a) 非对称双稳态层合板的双向跳变示意图; (b) 双稳态层合板的势能井示意图

Fig. 2 (a) The two-way snap-through of the bi-stable laminate, (b) potential energy well of bi-stable structures

此外，基于理论模型和有限元模型的仿真结果，将进一步通过实验验证共振驱动实现跳变的可能性。共振驱动策略结合了结构系统的固有振动特性，使构型切换更高效，更可控，为双稳定结构的未来应用提供了更大的潜力。

## 1 建模

层合板所用材料体系为5428/CCF300，材料的参数见表1。固化冷却过程中，层板从200℃降低到室温20℃。有限元模型如图3，矩形长为200mm×75mm，铺层方式为[0/0/90/90]，层板的厚度为0.125mm。边界条件为中心固定，四边自由。

表1 5428/CCF300的材料参数

Table 1 Material properties of the 5428/CCF300

|      | $E_{11}/$<br>GPa | $E_{22}/$<br>GPa | $G_{12}/$<br>GPa | $\nu_{12}$ | $\alpha_{11}/^{\circ}\text{C}^{-1}$ | $\alpha_{22}/^{\circ}\text{C}^{-1}$ |
|------|------------------|------------------|------------------|------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| CFRP | 145              | 9.75             | 12.0             | 1.2        | $1.8 \times 10^{-5}$                | $2.5 \times 10^{-5}$                |

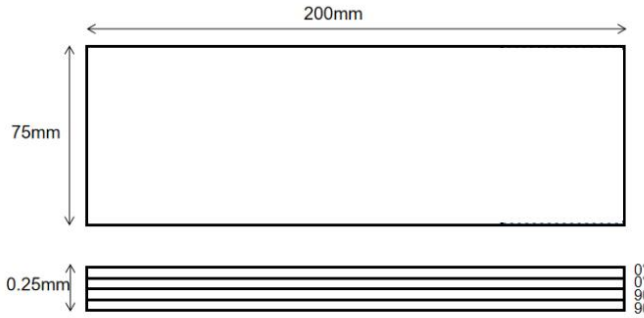


图3 双稳态层合板的尺寸和铺层示意图

Fig. 3 The size and lay-up of the bi-stable composite laminate

### 1.1 解析模型

该理论模型假设双稳态矩形板在制造时是绝对平面，然后冷却到室温。层合板中心固定，四边自由。采用了哈密顿原理建立了正交双稳态复合材料层合板的动力学模型，拉格朗日方程对时间的积分为0：

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T(t) + W_F(t) - \Pi(t)) dt = 0 \quad (1)$$

其中  $T(t)$  是动能， $W_F(t)$  为外力做功， $\Pi(t)$  是总的势能。

典型的正交双稳态层合板有两个圆柱形的稳定构型和一个不稳定的马鞍构型。建立笛卡尔坐标系，坐

标系的原点位于层合板的中心，x轴和y轴分别平行于矩形的长和宽。由于双稳态板的厚度远小于其的长宽，因此基尔霍夫假设在此适用，我们假定平板为平面应力状态。层板的内部应变为：

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中  $\varepsilon_x^0$ 、 $\varepsilon_y^0$  和  $\gamma_{xy}^0$  为层板的中心面应变，k为层板弯曲曲率和扭曲曲率。

Hyer<sup>[2]</sup>指出了为了考虑双稳态层板的大变形，必须将几何非线性纳入到几何方程中。根据冯卡门假设，双稳态层板的中心面应变和位移之间的关系为：

$$\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中  $u^0$ 、 $v^0$  和  $w$  分别为面内位移和离面位移。

考虑层板在固化的过程中所产生的残余热应力，以及固化过程中并无外界能量输入，层合板的弹性总势能由下式给出：

$$\Pi = \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left( \frac{1}{2} \left[ \varepsilon^{0T} \quad \mathbf{k}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} - \left[ \mathbf{N}_S^T \quad \mathbf{M}_S^T \right] \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \right) dy dx \quad (5)$$

其中  $L_x$  和  $L_y$  分别为矩形的长和宽，并且假设其在变形过程中是保持不变的。 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{D}$  分别为拉伸刚度矩阵，拉弯耦合刚度矩阵和弯曲刚度矩阵。 $\mathbf{N}_S$  和  $\mathbf{M}_S$  为残余热应力在双稳态层合板厚度方向上积分得到

的力和力矩，取决于板的热膨胀系数。双稳态层合板弹性势能的大小取决于由假设的位移函数  $u^0$ ， $v^0$  和  $w$  表示的中心面应变  $\epsilon^0$  和曲率  $\mathbf{k}$  的大小。非对称层合板的拉弯耦合刚度矩阵不为零，因此，层板中心面上的应变包含薄膜应变和弯曲应变。

弯曲曲率为常数时，理论模型无法准确预测层板的刚度。因此，本文假设层板的弯曲曲率部不为常数，考虑到层板的边界条件和变形的对称性和反对称性的特点，假设层板的四阶面外位移函数为：

$$w = a(t)x^2 + b(t)y^2 + a_1(t)x^4 + b_1(t)y^4 + e(t)x^2y^2 \quad (6)$$

假设层板的拉伸薄膜应变与层板的截面形状相关，与面外位移函数  $w$  无关，其薄膜应变的四阶多项式为：

$$\begin{aligned} \epsilon_x^m(t) &= c(t) + c_1(t)y^2 + c_2(t)y^4 + c_4(t)x^2y^2 \\ \epsilon_y^m(t) &= d(t) + d_1(t)x^2 + d_2(t)x^4 + d_4(t)x^2y^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中，未知系数  $a_i(t)$ ， $b_i(t)$ ， $e(t)$ ， $c_i(t)$  和  $d_i(t)$  是模型中的广义坐标。可通过积分运算的到层板的中心面位移函数，通过几何方程式 (4) 得到层板的中心面剪切应变。本文所建立的正交非对称层板的理论模型共有 13 个未知参数。

针对中心固定，四边自由的双稳态层合板，在固化冷却过程中，在矩形四角施加不同的外力，在这种情况下外力做功为：

$$\begin{aligned} W_F(t) &= 2F \left( a(t) \left( \frac{L_x}{2} \right)^2 + b(t) \left( \frac{L_y}{2} \right)^2 + a_1(t) \left( \frac{L_x}{2} \right)^4 + b_1(t) \left( \frac{L_y}{2} \right)^4 + e(t) \left( \frac{L_x}{2} \right)^2 \left( \frac{L_y}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

根据哈密顿原理，拉格朗日方程 (1)，以及位移函数，由此导出系统的运动方程：

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{X}}_1 + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{X}}_1) + \mathbf{K}_1(\mathbf{X}_1) = \mathbf{F}_1 \quad (9)$$

$\mathbf{M}_1$  为质量矩阵， $\mathbf{D}(\dot{\mathbf{X}}_1)$  为阻尼力， $\mathbf{K}_1(\mathbf{X}_1)$  为非线性弹性力。 $\mathbf{F}_1$  为外部激振力，取决于层合板的惯性和加速度  $\mathbf{a}$ 。

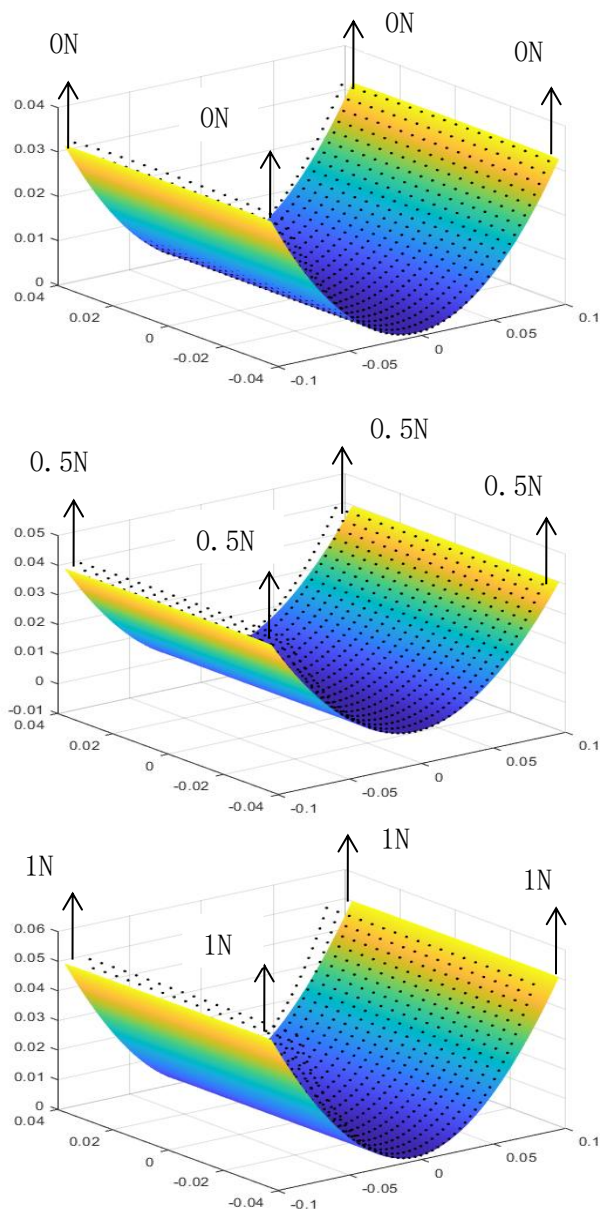


图4 不同载荷下双稳态层合板的预测稳定构型。点为有限元预测结果，面为理论模型预测结果。

Fig. 4 Predicted stable configurations of bi-stable laminates under different applied force.

表2 矩形双稳态层合板顶点的预测离面位移

Table 2 Predicted out-of-plane deflection at the corners of the bi-stable plates

|      | 解析模型    | 有限元模型   | 误差    |
|------|---------|---------|-------|
| 0N   | 32.1312 | 32.5521 | 1.29% |
| 0.5N | 39.7729 | 40.3194 | 1.35% |
| 1N   | 48.8089 | 49.6149 | 1.62% |

本节分析了 $200\text{mm} \times 75\text{mm}$ ,  $[90_2/0_2]$ 双稳态层合板, 分别通过理论模型和有限元模型计算其构型, 通过比较矩形层合板顶点的最大离面位移来验证理论模型的精确度。不同外力水平下结构稳定构型的有限元结果和理论预测结果对比如图4所示, 其中曲面图为理论计算结果, 离散点为有限元计算结果。双稳态层合板的最大离面位移对比如表2所示, 有限元模型和理论模型的计算结果误差都小于2%, 基本吻合, 说明建立理论模型时充分考虑了层板的曲率以及中心面应变分布特点。

## 1.2 有限元模型

本文采用ABAQUS中的壳单元 (S4R) 建立矩形正交铺设层板的有限元模型, 并在初始分析步中约束中心点的位移和转动, 并在预定义场中设置温度为 $200^\circ\text{C}$ 。在第一个静态分析步中, 改变温度场到室温, 当有限元模型自由收敛后, 得到稳定构型 I, 如图5所示。要得到稳定构型 II, 重启第一个静态分析步, 并在矩形的四个顶点施加z方向的位移扰动, 在第二个分析步中撤销位移扰动, 模型将收敛至另一稳定构型 II。

图6显示了稳定构型 I 的主曲率。具有正交铺层的双稳态层合板具有两个主曲率方向相互垂直的稳定构型。在稳定状态 I 的曲率方向上, 沿矩形的长绘制双稳态层合板的纵向曲率, 沿矩形的宽绘制横向曲率。板的曲率在两个方向上对称分布, 并且曲率从两个自由边的最小值增加到最大值。边界处存在较大变化, 在中间区域, 曲率均匀分布。如图7所示稳定构型 II 的纵向曲率分布规律与稳定构型 I 的横向曲率大致相似, 而稳定构型 II 的横向曲率分布规律与稳定构型 I 的纵向曲率分布也大致相似。

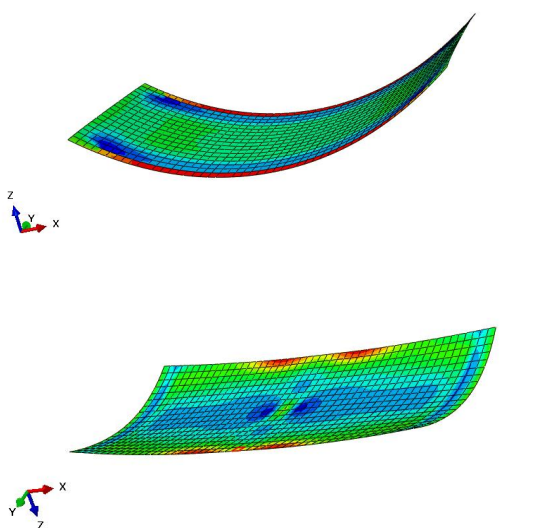
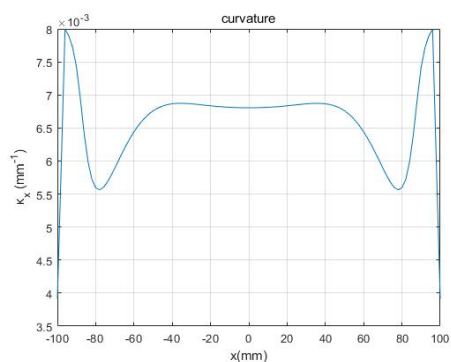
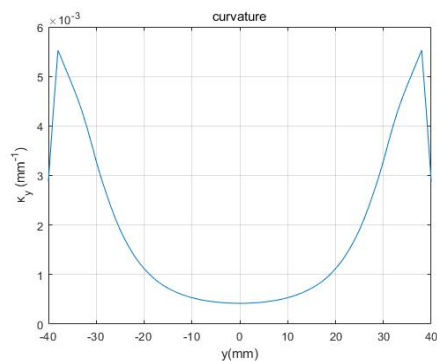


图5 (a) 稳定构型 I; (b) 稳定构型 II

Fig.5 (a) stable state I, (b) stable state II



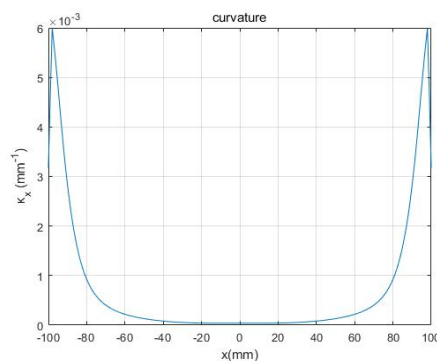
(a) 纵向曲率  $\kappa_x$



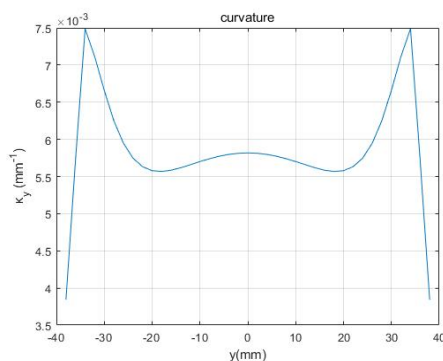
(b) 横向曲率  $\kappa_y$

图6 稳定构型 I 的曲率

Fig.6 The curvature of stable state I



(a) 纵向曲率  $\kappa_x$



(b) 横向曲率  $\kappa_y$

图7 稳定构型 II 的曲率

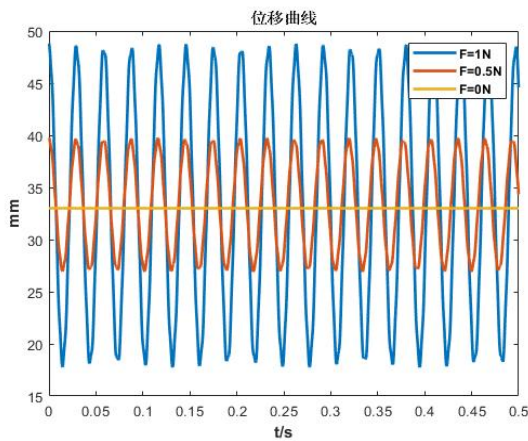
Fig.7 The curvature of stable state II

## 2 动力学分析

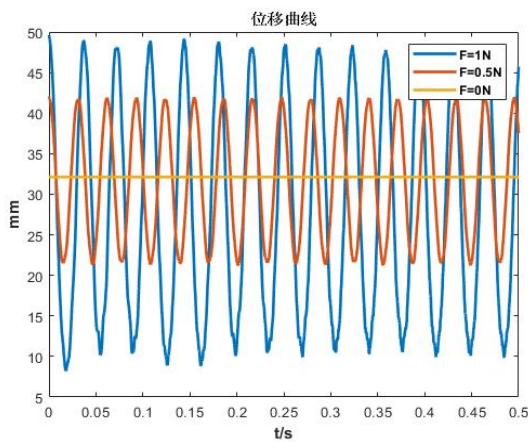
### 2.1 自由振动

为了研究双稳态层合板自由振荡，将系统的阻尼设置为0，撤销掉四个顶点的集中力，计算顶点自由振动的位移曲线。通过解析模型计算自由振动的幅值时，正弦激励的幅值为0。图9显示了双稳态层合板分别撤销1N, 0.5N和0N的外力后的顶点的自由振动位移曲线，如图8。

将数据进行快速傅里叶变换，结果如图9所示。外力载荷为0.5N和1N时，曲线只有一个波峰，这表明系统在做正弦运动。有限元模型中，当 $F=1N$ 时，结构的一阶固有频率为14Hz，当 $F=0.5N$ 时，结构的一阶固有频率为16Hz，而下文通过“Frequency”分析步得到的稳定构型 I 的一阶固有频率为15.694Hz。解析模型下，载荷为0.5N和1N时的固有频率都为17Hz，比有限元预测结果略高。



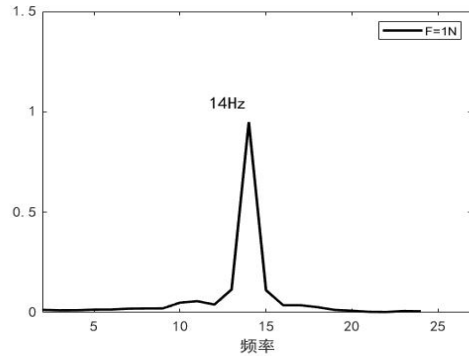
(a) 解析模型



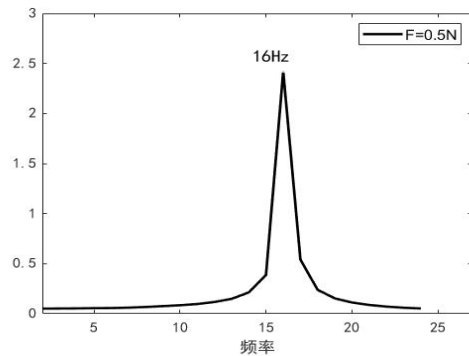
(b) 有限元模型

图8 双稳态层合板在无阻尼时的自由振动位移曲线

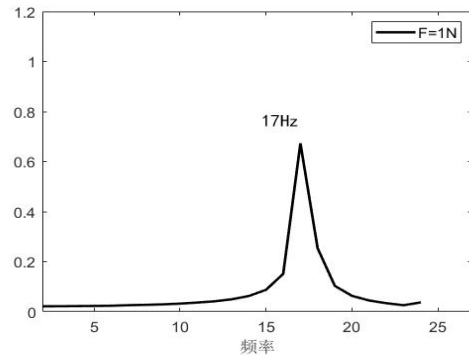
Fig. 8 Predicted free vibration of the bi-stable laminate with zero damping



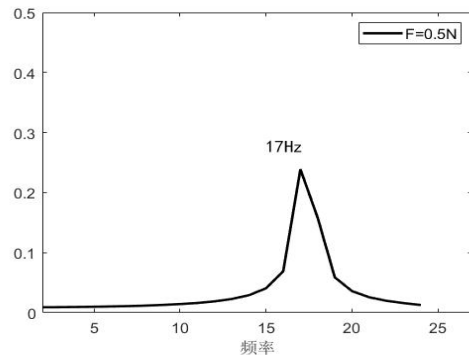
(a) 有限元,  $F=1N$



(b) 有限元,  $F=0.5N$



(c) 解析模型,  $F=1N$



(d) 解析模型,  $F=0.5N$

图9 层合板自由振动的快速傅里叶分析

Fig. 9 FFT analysis of the predicted free vibration of the plate in Fig. 9

在施加激励载荷之前，通过有限元的“Frequency”分析步分析双稳态层合板的模态。图10分别显示了两种稳定构型的一阶模态。可以看出，双稳态层合板的一阶模态与稳定构型的变形模式相同，这也是本文要重点关注的模态。由于本文的重点是基于一阶模态频率，通过施加正弦载荷激励稳定构型 I 实现两个构型之间的动态激励，因此未列举高阶模态。稳定状态 I 的一阶固有频率为15.694Hz，稳定状态 II 的一阶自然频率为17.423Hz。

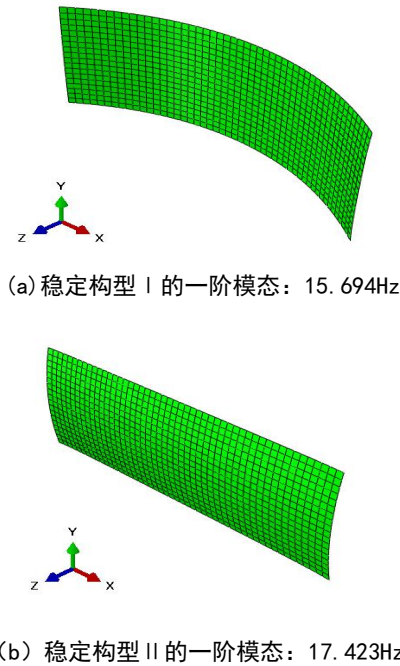


图10 稳定构型的一阶模态

Fig. 10 The first-order modal of two stable configurations

考虑到现实环境中系统存在的阻尼，设置瑞利阻尼的  $\alpha = 20$ ，图11可以观察双稳态层合板自由振动的衰减过程，两个模型预测的衰减率几乎相同。

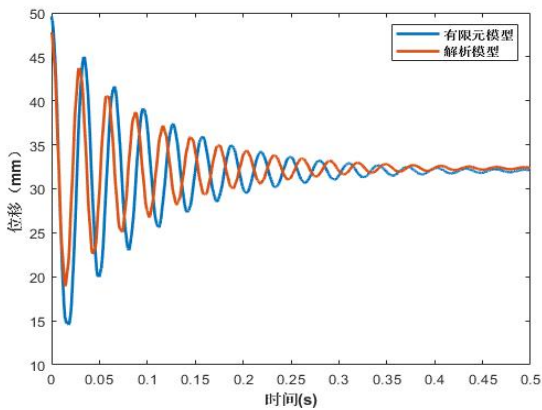


图11 有阻尼的自由振动,  $\alpha=20$

Fig. 11 Predicted free vibration of the plate

## 2.2 共振驱动

本文的主要目的是研究共振驱动下的双稳态复合材料层合板的动态特性，为后续的高效驱动提供力学基础。本章探讨了振幅对结构在一阶线性固有频率下的动力学响应的影响。并对比了有限元方法和动力学模型下的动态响应。

双稳态板的非线性振动包括周期振动、准周期振动和混沌振动。当激励幅值较小时，非对称双稳态复合材料层合板在平衡构型附近产生小振幅周期振动。当激励振幅逐渐增大时，在平衡构型附近产生小振幅准周期振动。当振幅增加到一定范围时，在稳定构型之间会出现大振幅的混沌运动，并伴有单向或双向跳变。混沌振动通常发生在双稳态层合板的跳变之前，混沌振动是跳变的有利条件。

根据双稳态板的动力学方程 (9)，综合考虑上一节对结构一阶模态的分析，以  $f = 16\text{Hz}$  作为外部激励频率，设置外部加速度激励为  $a = 50 \times t \times \sin(f \times 2\pi \times t)$ ，通过解析模型得到系统的时域响应，如图12所示。当外部激励振幅随时间持续增大，结构从线性正弦振动转变为非线性振动，从单阱振动变为间断的阱间振动，在  $t=9\text{s}$  左右，振幅到达临界值，双稳态层合板发生跳变，进而稳定在稳定构型 II 附近振动。

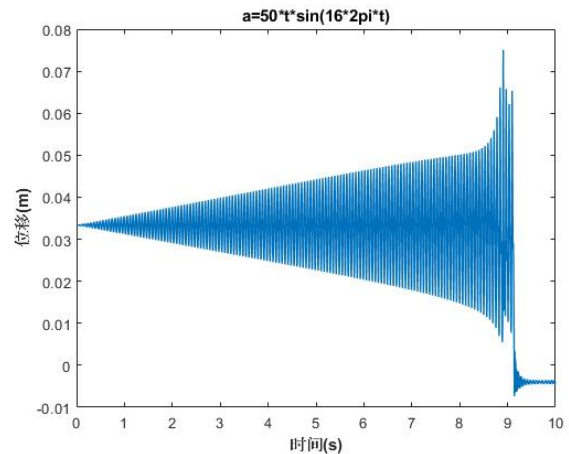


图12 双稳态层合板在加速度激励为  $a = 50 \times t \times \sin(f \times 2\pi \times t)$  下的时域响应

Fig. 12 The time domain responses of bi-stable plates excited by a sinusoidal input, excitation acceleration is  $a = 50 \times t \times \sin(f \times 2\pi \times t)$

首先，研究了初始状态为稳定状态 I 时的动态响应。选择一阶固有频率16Hz作为外部激励频率，以激励幅值作为变量。分别用有限元模型和解析模型预测了双稳态层合板在简谐振动下的动态响应。选择两个代表性参考数据集，

图13显示了当加速度激励振幅值分别为200和500mm时，矩形层合板顶点的位移曲线，蓝色线条为解析模型预测果，橙色线条为有限元模型的预测结果。

通过结果对比可以发现，当激励振幅为200m/s<sup>2</sup>时，双稳态复合材料层压板在构型 I 附近做阱间振动，二者预测的结果几乎一致。当振幅增加到500mm/s<sup>2</sup>时，结构发生了阱间振动，并且跳变稳定后，在稳定构型 II 附近做阱间振动。

上述的结果验证了通过共振驱动双稳态层合板实现结构切换的可行性。在某一构型的共振频率下利用振幅的变化可以有效的完成构型切换，并且稳定的处于切换构型的状态下。同时，通过结也对比也说明了本文提出的解析模型对于双稳态结构切换过程的动力学特性预测的准确性。

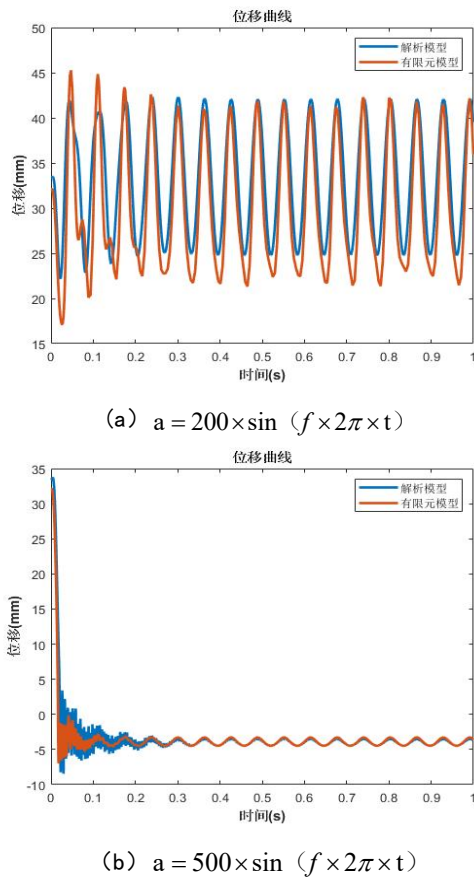


图13 双稳态层合板在不同激励振幅下的位移曲线

Fig. 13 The displacement of the asymmetric bi-stable plates from stable state I to stable state II

### 3 结果与讨论

非对称双稳态[90<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>]层合板的跳变具有强烈的非线性特征，导致动力学模型难以进行准确预测。尽管研究者们已经推导出几个基于哈密顿原理和瑞利里兹法的动态模型，

这些模型在预测层合板的稳定构型都表现良好，但在预测动态跳变行为都存在不足。本文建立的四阶位移多项式，准确的预测了双稳态层合板整个区域的模型，不局限于单点预测。相较于有限元分析，该模型的极大的简化了运算，但由于只有13个未知参数，分析模型不够精确，在预测层合板的临界跳变点时与有限元结果有出入，还有待改进。

双稳态层合板在正弦激励下主要有阱内振动和阱间振动两种基本振动模式。计算结果表明双稳态层板稳定构型 II 的刚度大于稳定构型 I 的刚度。通过扩大两种稳定构型的一阶固有频率的差异，使不同构型产生跳变的实现条件的差异增大，能更好的控制层板的跳变行为。仿真结果表明本文提出的解析模型对于双稳态结构切换过程的动力学特性预测的具有一定的准确性，也为后续的共振驱动多稳态结构构型切换提供了理论模型。

### 参考文献

- [1] Hyer M W. Some observations on the cured shape of thin unsymmetric laminates[J]. Journal of Composite Materials, 1981, 15(2): 175-194.
- [2] Hyer MW. Calculations of the Room-Temperature Shapes of Unsymmetric Laminates two. Journal of Composite Materials. 1981;15(4):296-310.
- [3] Hyer MW. The Room-Temperature Shapes of Four-Layer Unsymmetric Cross-Ply Laminates. Journal of Composite Materials. 1982;16(4):318-340.
- [4] Jun W J, Hong C S. Effect of residual shear strain on the cured shape of unsymmetric cross-ply thin laminates[J]. Composites Science & Technology, 1990, 38(1):55-67.
- [5] Jun WJ, Hong CS. Cured Shape of Unsymmetric Laminates with Arbitrary Lay-Up Angles. Journal of Reinforced Plastics and Composites. 1992;11(12):1352-1366.
- [6] Wu Z, Li H, Friswell M I. Advanced nonlinear dynamic modelling of bi-stable composite plates[J]. Composite Structures, 2018, 201: 582-596.
- [7] Diaconu C G, Weaver P M, Arrieta A F. Dynamic analysis of bi-stable composite plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(4-5): 987-1004.
- [8] Brunetti M, Vincenti A, Vidoli S. A class of morphing shell structures satisfying clamped boundary conditions[J]. International Journal of Solids and Structures, 2016, 82: 47-55.
- [9] Brunetti M, Mitura A, Romeo F, et al. Nonlinear dynamics of bistable composite cantilever shells: An experimental and modelling study[J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 526: 116779.
- [10] Arrieta A F, Neild S A, Wagg D J. Nonlinear dynamic response and modeling of a bi-stable composite plate for applications to adaptive structures[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 58(1): 259-272.
- [11] Wilkie W K, Bryant R G, High J W, et al. Low-cost piezocomposite actuator for structural control applications[C]//Smart structures and materials 2000: industrial and commercial applications of smart structures technologies. SPIE, 2000, 3991: 323-334.
- [12] Dano M L, Hyer M W. SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(22): 5949-5972.
- [13] Senba A, Ikeda T, Ueda T. A two-way morphing actuation of bi-stable composites with piezoelectric fibers[C]//51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 18th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 12th. 2010: 2744.
- [14] Arrieta A F, Wagg D J, Neild S A. Dynamic snap-through for morphing of bi-stable composite plates[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2011, 22(2): 103-112.
- [15] Zhang W, Liu Y Z, Wu M Q. Theory and experiment of nonlinear vibrations and dynamic snap-through phenomena for bi-stable asymmetric laminated composite square panels under foundation excitation[J]. Composite Structures, 2019, 225: 111140.